альных беседах, консультациях, на родительских собраниях, через различные виды наглядной агитации убеждаю родителей в необходимости повседневного внимания к **математическому развитию детей**, поощрению стремления ребенка самостоятельно выяснять непонятное, вникать в суть **математических понятий и операций**, узнавать новое. Родителям так же было предложено зарегистрировать детей на сайте Учи.ру. Для родителей проводились родительские собрания «Математика- это интересно», были организованы индивидуальные и подгрупповые консультации для родителей воспитанников «Математика на кухне», «Развиваем логическое и математическое мышление дошкольников», «Занимательная математика». Организовали конкурс среди родителей на лучший математический кроссворд для дошкольников, выставку творческих работ, посвященных математике (стихи, сказки, рисунки и т.д.)

Химические науки

Верблюдова Мария Алексеевна,
группа ЭМ – 16, 2 курс
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Камышинский индустриально-педагогический колледж
имени Героя Советского Союза А.П.Маресьева»
Волгоградская область, г. Камышин

Научный руководитель: **Тиманович Елена Николаевна**
преподаватель химии и биологии
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Камышинский индустриально-педагогический колледж
имени Героя Советского Союза А.П.Маресьева»
Волгоградская область, г. Камышин

НЕВИДИМАЯ ЗАЩИТА ПЛАНЕТЫ ЗЕМЛЯ

Наша планета Земля имеет три слоя: твердую оболочку – литосферу, водную оболочку – гидросферу и газовую оболочку – атмосферу. Состояние всех оболочек сегодня вызывает у мыслящих людей тревогу, ведь человек – часть природы, пользующийся дарами окружающей среды и насколько эта среда будет здорова, настолько крепким и здоровым будет организм человека, его умственные задатки смогут перерасти в открытия, а его эмоциональный настрой будет подсказывать верные решения имеющихся проблем. Данная работа посвящена проблемам газовой оболочки Земли, а именно – анализу состояния озонового слоя и его значению для сохранения Жизни на планете Земля.

Газообразный озон – О3, открытый в середине прошлого века, долгое время привлекал внимание ученых лишь своими уникальными химическими и физическими свойствами. Особенно возрос интерес к озону, после того, как выяснилась его распространенность в земной атмосфере и та особая роль, которую он играет в защите всего живого от воздействий опасного ультрафиолетового излучения. Особенно активно атмосферный озон стал изучаться в последние десятилетия. С ним, в последние два десятилетия, было связано несколько теорий. Начиная от появившегося в самом начале 1970-х годов прогноза о том, что полеты реактивной авиации уничтожат слой озона уже к 1980 году, и, кончая пресловутой “озоновой дырой”, которая будоражит умы мыслящих людей. Причина беспокойства в том, что озоновый слой, окружающий Землю, задерживает губительное излучение солнца, и разрушение озонного слоя может привести к целому ряду необратимых последствий для растений, животных и человека. К таким последствиям относят – парниковый эффект, истощение лесных, почвенных и водных ресурсов, прогрессирующее наступление пустынь. Озоновый слой, разделяющий тропосферу и стратосферу, находящийся приблизительно на высоте 15-17 км., является составной частью биосферы Земли, включающей в себя совокупность живых организмов и неорганические вещества, находящиеся в общем круговороте. К изучению процессов, связанных с атмосферным озоном, привлечены значительные силы ученых у нас в стране и за рубежом. Ведутся наблюдения за количеством озона и его “врагов” – различных загрязняющих веществ. Анализируются данные за прошедшие годы, ставятся новые эксперименты. Однако проблема атмосферного озона к настоящему времени далеко не изучена, и ряд важных и интересных разделов этой проблемы ждет своего разрешения, в особенности явления, связанные с влиянием на озоновый слой некоторых естественных факторов и антропогенных воздействий. Для их осмысления необходимо постоянное и всеобъемлющее слежение за состоянием окружающей среды (мониторинг). Из трех стихий, окружающих человека – твердой оболочки, воды и воздуха, — последняя является самой уязвимой. И не случайно именно в атмосфере появился первый реальный сигнал бедствия. Этот сигнал – озоновая дыра как вестник возможного глобального уменьшения защитного слоя озона в результате антропогенных загрязнении.

1. Что такое озон и его роль в атмосфере

Озон - это разновидность кислорода. Озон был открыт в 1839 году немецким химиком Шенбейном, а в 1873г. его обнаружили в приземной атмосфере. Спустя 8 лет английский химик Гартли обнаружил озон в верхних слоях атмосферы. Озоновый слой в стратосфере важен тем, что он поглощает определённый диапазон солнечного излучения. Сама земля тоже испускает излучение в инфракрасном спектре. Так вот часть этого излучения тоже задерживается озоном, тем самым, предохраняя планету от охлаждения. Основной задачей озона является защита человека и всей биосферы планеты от жёсткого ультрафиолетового излучения с длинами волн от 250 до 320 нм.

2. Природа и значение озонового экрана

Наиболее вредным последствием выброса парниковых газов в атмосферу является разрушение ими озонового слоя. Дело в том, что наряду с видимым светом Солнце излучает ультрафиолетовые волны. Ультрафиолетовое излучение похоже на световое, но длина его волн на порядок короче. Хотя ультрафиолетовые лучи невидимы, они обладают большей энергией, чем видимые. Проникая сквозь атмосферу и поглощаясь тканями живых организмов, они разрушают молекулы белков и ДНК. Именно это происходит, когда мы загораем. Если бы всё ультрафиолетовое излучение, попадающее на верхние слои атмосферы, достигало поверхности Земли, то вряд ли на ней сохранилась бы жизнь; все растения и животные просто погибли бы. Даже небольшая, доступная нам часть этого количества (менее 1%) вызывает загар и ежегодно 200 -600 тыс. случаев рака кожи в США.

Мы защищены от губительного воздействия ультрафиолетового излучения, так как большая его часть (свыше 99%) поглощается слоем озона в стратосфере на высоте около 25 километров от поверхности земли. Этот слой обычно называют озоновым экраном. Необходимость его сохранения не требует доказательств. Однако некоторые антропогенные вещества его разрушают.

3. Источники разрушения озонового слоя

На первых этапах формирования Земли как среды обитания живых организмов все системы планеты развивались в полной гармонии с атмосферой, литосферой и гидросферой, не испытывая человеческого воздействия и не оказывали негативных воздействий. Но, по мере развития человеческого общества, с зарождением и развитием сельского хозяйства, с появлением промышленности воздействие человека на среду стало ощутимее. Повсеместная индустриализация, особенно развернувшаяся за последние два столетия, привела к опасному уровню загрязнения воздушной среды. Загрязнения – это поступление в окружающую среду каких-либо веществ или энергии в таких больших количествах или в течение столь длительного времени, что эти вещества или энергия начинают наносить ущерб людям и окружающей среде. Еще в начале шестидесятых годов считали, что загрязнение атмосферы – это локальная проблема мегаполисов и индустриальных центров, но потом выяснили, что атмосферные загрязнители способны распространяться воздушными массами на большие расстояния, оказывая неблагоприятное воздействие на районы, находящиеся на значительном удалении от места выброса этих веществ.

К разрушению озонового слоя приводят многочисленные факторы. В первую очередь это фреоны. Фреоны – это собирательное название целой группы химических веществ, появившихся на свет ещё в 1920 годы прошлого столетия. Они применялись в холодильниках в качестве хладагентов. Ещё одна область применения фреонов - это использование их в аэрозольных упаковках в качестве распылителя. Большая часть производимых в мире фреонов, благодаря человеку, попадает в атмосферу, и можно смело утверждать, что выпуск фреонов и их применение губительны для озонового слоя. Фреоны достаточно быстро поднимаются вверх, в тропосферу и выше. В стратосфере под действием ультрафиолетового излучения они быстро разлагаются. В результате выделяются активные атомы хлора, вот они и участвуют в разложении озона.

Ещё один фактор, приводящий к уменьшению озонового слоя — это реактивные сверхзвуковые самолеты и запуски космических кораблей. Высокая температура в камерах сгорания реактивных двигателей приводит к образованию оксидов азота из находящихся там азота и кислорода. Причём скорость образования оксидов азота на прямую зависит от температуры, то есть мощности двигателя. Выбросы отработки продуктов сгорания в атмосферу активно разрушают озоновый экран Земли.

Уничтожают озон и минеральные удобрения. Озон может уменьшаться за счёт того, что в стратосферу попадает закись азота N2O, которая создается почвенными бактериями. Такую же закись азота производят и микроорганизмы в верхних слоях океанов и морей, получая азот с потоком подпочвенных вод. Таким образом, применение азотных удобрений на полях должно быть строго дозированным, этим мы замедлим процесс разрушения озона азотом.

Ядерные взрывы тоже способствуют истощению озонового слоя. При сильном нагреве, а температура ядерного взрыва около 6000°С, происходят такие преобразования химических веществ, которые при нормальных условиях протекают вяло или вообще не протекают. Излучение при взрыве приводит к образованию окиси азота. Закись азота обнаруживается также и в дымовых газах электростанций. Это очень сильный источник влияния на атмосферу.

Очень важную роль в разрушении озона играет пар. Эта роль реализуется через гидроксид ионы(-ОН), которые входят в состав молекул воды. При конденсации пара идет потребление кислорода озонового слоя. Поэтому от количества пара в стратосфере зависит скорость разрушения озона.

4. «Озоновые дыры» и их влияние

Как только существование “озоновой дыры” стало научным фактом, естественно возник вопрос: какова же её природа? И через некоторое время появились две гипотезы – антропогенная - фотохимическая и метеорологическая. Представители первой гипотезы считали, что уменьшение озонового слоя есть результат антропогенного загрязнения атмосферы. «Озоновая дыра имеет чисто метеорологическое происхождение и связана со спецификой динамического режима стратосферы в Антарктике», – утверждали приверженцы второй гипотезы. У каждой из гипотез были свои плюсы и минусы. В рамках антропогенной концепции было невозможно ответить на вопрос о том, почему “дыра” (если она отражает общую тенденцию всевозрастающего загрязнения атмосферы) наблюдается лишь над Антарктикой и только весной. А сторонникам метеорологической природы “дыры” было затруднительно объяснить, почему последняя не наблюдалась до начала 1980 годов и почему в 1980году она появилась и стала увеличиваться год от года. В октябре 1987 года были получены данные, которые показали, что к антропогенному загрязнению атмосферы явление “озоновой дыры” имеет самое прямое отношение.

Возникновение “озоновых дыр” (сезонное уменьшение содержания озона вдвое и более) впервые наблюдали в конце 1970 годах над Антарктидой, а сегодня они уже появляются и в южных регионах Австралии, Чили и Аргентины. Чуть позже аналогичный процесс истощения озона наблюдали и над Северным полушарием. Вначале 1990 годов наблюдали сокращение толщины озонового слоя на 20 – 25 % над Скандинавией, Прибалтикой и северо-западными областями России.

Истощение озонового слоя может оказать значительное влияние на экологию Мирового океана. Многие из имеющихся в нем систем испытывают затруднения уже сейчас при ориентации и миграции, подавляются фотосинтез и ферментативные реакции, а также нарушаются процессы размножения и развития живых существ, особенно на ранних стадиях формирования. Поскольку чувствительность к ультрафиолетовой радиации разных составляющих водных экосистем существенно различается, то происходит изменение структуры водных экосистем. В этих условиях могут погибать и вытесняться полезные формы организмов и усиленно размножаться вредные для окружающей сред, на пример сине-зеленые водоросли.

Ультрафиолетовое излучение способно непосредственно поражать икру и мальков рыб, личинки креветок, устриц и крабов, а также других мелких животных. В условиях истощения атмосферного озона ихтиологи прогнозируют замедление роста и гибель мальков промысловых рыб.

Очень важную роль в формировании продуктивности сельскохозяйственных растений играют почвенные микроорганизмы, оказывающие значительное влияние на плодородие почв. Они способны утилизировать азот воздуха с последующим использованием его растениями в процессе фотосинтеза. Эти микроорганизмы - азотобактер подвергаются непосредственному воздействию ультрафиолетовой радиации. В результате разрушения озонового слоя данные бактерии погибнут от радиации, т. е. следует ожидать уменьшение плодородия почв. Весьма вероятным является также вытеснение и отмирания других полезных форм почвенных микроорганизмов, чувствительных к ультрафиолетовой радиации, и размножение устойчивых форм, часть которых может оказаться патогенными.

Для человека естественная ультрафиолетовая радиация фактором риска уже при существующем состоянии озонового слоя. Реакции на ее воздействие разнообразны и противоречивы. Некоторые из них улучшают состояние здоровья, другие ухудшают его. При ярком солнечном свете возможно острое воспаление наружных оболочек глаза (это происходит в снежном высокогорье, арктических и пустынных зонах) и сопровождается болевыми ощущениями или ощущением постороннего тела в глазу, слезотечением, светобоязнью и спазмом век. В результате неумеренного загара на коже развивается асептическое воспаление, или ожог, сопровождающаяся болевыми ощущениями, повышением температуры, угнетением потоотделения и ухудшением общего состояния.

В результате разрушения защитного экрана медики ожидают снижение сопротивляемости у населения ряда инфекционных заболеваний. Как минимум, в их число необходимо включить болезни с кожной фазой развития или зависящие от клеточного иммунитета: корь, ветряная оспа, герпес и другие вирусные заболевания с кожной сыпью, проникающие через кожу паразитарные болезни типа малярии, а также зависящие от клеточного иммунитета туберкулез и некоторые грибковые заболевания. Ежедневная летняя ультрафиолетовая радиация ответственна за основную часть опухолей кожи, приводящих в большинстве случаев к раку кожи. Но, эта же ультрафиолетовая радиация играет важную роль в обеспечении организма человека витамином Д, регулирующим процесс фосфорно-кальциевого обмена. Дефицит витамина Д вызывает рахит и кариес, а также играет важную роль в заболеваниях предстательной железы, дающей высокую смертность. Увеличение степени истощения озонового слоя сегодня свидетельствует о недостаточности предпринимаемых усилий по его защите.

5. Проблема озонового экрана и пути ее решения

Какие же проблемы грозят человечеству от разрушения озонового слоя и пути их решения. Основными разрушителями являются:

1.Выхлопы автомобилей.

а) замена топлива в существующем автомобильном транспорте на альтернативное, экологически более чистое.

б) переход на другие источники энергии (например, электромобили, использование солнечной энергии).

2. Загрязнение фреонами (холодильная техника, аэрозоли).

3. Химические удобрения.

4. Сжигание промышленного топлива.

5. Ядерные взрывы.

6. Выброс отработанных газов при полетах реактивных самолетов и крупных ракет.

7. Добыча нефти и природного газа.

Международная общественность, осознавая грозящую опасность, предпринимаются все новые шаги в защиту озонового слоя. Рассмотрим некоторые из них.

1) Создание различных организаций по охране озонового слоя (ЮНЕП, КОСПАР, МАГА).

2)Проведение конференций.

Проблема сохранения озонового слоя относится к глобальным проблемам человечества. Она в центре обсуждений на многих экологических форумах самого разного уровня вплоть до советско-американских встреч на высшем уровне (в Вашингтоне, США в декабре 1987г.) Надо надеяться на то, что глубокое осознание грозящей человечеству опасности подвигнет правительство всех стран на принятие необходимых мер по уменьшению выбросов вредных для озона веществ.

Заключение

Краткий обзор перечисленных факторов воздействия на природную среду показывает, что и сейчас не установлено значение многих химических и биохимических последствий этого воздействия. С другой стороны, уже сегодня можно оценить все угрожающее многообразие антропогенного вмешательства и наносимого человеком ущерба окружающей среде.

Источниками вмешательства являются:

1. Постоянное стремление к росту производства и потребления.

2. Демографический взрыв, который приводит к тому, что даже незначительная нагрузка на природу в каждом отдельном случае в целом превращается в глобальную проблему.

3. Односторонний подход к техническому прогрессу, который в этом столетии привел к появлению целого потока технических продуктов, чуждых природе, а то и враждебных ей.

Я не осветила еще и другую проблему – во все звенья природной системы проникли несовместимые с ней чужеродные вещества, угрожающие во многих случаях самому существованию экосистемы. Возникла необходимость принятия срочных мер, чтобы спасти природу. Но это не означает, что техника, химия, хозяйственная деятельность и экономика должны вернуться к каменному веку; наоборот, это означает необходимость продвижения к новым научным достижениям, опирающимся на познание, когда возникает общность с природой, в которой человек обретет долголетие. Человечество должно сознавать, что мы – только гости на этой голубо - зеленой планете.

Библиографический список

1.Данилов А. Д. Атмосферный озон – сенсации и реальность: Гидрометиоиздательство, 1991-334с.
2. Озоновый щит Земли и его изменения: Гидрометиоиздательство, 1992-211с.
3. Ортенберг Ф. С. Озон: взгляд из космоса: Знание, 1990-433с.
4. Роун Ш. Озоновый кризис: Пятнадцатилетняя эволюция неожиданной глобальной опасности: “Мир”, 1993- 321с.
5. Стрижевский А. Д. Свет: Природа и человек: Природный мир, 1992-апр.-с.34.
6. Фелленберг Г. Загрязнение природной среды: Учеб. Пособие: “Мир”, 1997- 528с.

Физико-математические науки

Марзаев Илья Игоревич, ученик 8 А класса
муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя школа №7 им. А. П. Гайдара» г. Арзамас Нижегородская область

Научный руководитель: **Жешко Марина Валентиновна**
учитель математики
муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя школа №7 им. А. П. Гайдара» г. Арзамас Нижегородская область

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ «РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ»

> Под методом же я разумею точные и простые правила, строгое соблюдение которых всегда препятствует принятию ложного за истинное, и без излишней траты умственных сил, но постепенно и непрерывно увеличивая знания, способствует тому, что ум достигает истинного познания всего, что доступно.
> Декарт.

Тема моей работы – различные способы решения квадратных уравнений. Теория уравнений занимает ведущее место в алгебре и математике в целом. Сила теории уравнений в том, что не только имеет теоретическое значение для познания естественных законов, но и служит практическим целям. Большинство жизненных задач сводится к решению различных видов уравнений, и чаще это уравнения квадратного вида.

Квадратное уравнение представляет собой большой и важный класс уравнений, решающих как с помощью формул, так и с помощью элементарных функций.

В учебниках мы знакомимся с несколькими видами квадратных уравнений, и отрабатываем решение по формулам. Вместе с тем, современные научно-методические исследования показывают, что использование разнообразных методов и способов позволяет значительно повысить эффективность и качество изучения решений квадратных уравнений.

Выбор способа должен оставаться за учащимся. Каждый ученик должен уметь верно и рационально решать квадратные уравнения. Так как в некоторых случаях можно их решать устно, только для этого необходимо помнить алгоритм решения квадратных уравнений, который может пригодиться на экзамене ЕГЭ и различных жизненных ситуациях.

Таким образом, возникает необходимость изучения этих дополнительных способов решения. Все сказанное выше определяет ***актуальность*** темы выполненной работы.

Цель моей работы – есть рассмотрение некоторых способов решения квадратных уравнений, а так же нестандартных способов их решения на конкретных примерах.

Задачи.

1.Произвести анализ учебно - методической литературы по решению квадратных уравнений.

2.Изучить историю развития квадратных уравнений.
3.Изучить и провести анализ различных способов решения квадратных уравнений.
4.Апробировать материал на практике.

Структура.

Работа состоит из введения, основной части, заключения, списка литературы и приложения.

Во введении содержится обоснование актуальности выбранной темы, цель работы, выделены задачи.

В основной части представлена история возникновения квадратных уравнений в Индии, Древнем Вавилоне, Европе. Виды квадратных уравнений. Различные способы их решения.

В заключении делается вывод из проделанной работы.

Список использованной литературы содержит несколько наименований.

В приложении содержится некоторые примеры.

Чтобы решить уравнение, корни его отыскать,
Нужно немного терпенья, ручку, перо и тетрадь.
Минус напишем сначала, рядом с ним пополам,
Плюс – минус, знак радикала, с детства знакомого нам.
Ну, а под корнем, приятель, сводится все к пустяку.
р пополам и в квадрате минус несчастное q.

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне.

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Неполные квадратные уравнения умели решать в Вавилоне (около 2000 лет до н. э.). Об этом свидетельствуют найденные клинописные тексты задач с решениями.

Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

$$X^2 + X = \tfrac{3}{4};\ X^2 - X = 14,\ 5$$

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены.

Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

2. Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения.

Некоторые виды квадратных уравнений, сводя их решение к геометрическим построениям, могли решать древнегреческие математики. Приемы решения уравнений без обращения к геометрии дает Диофант Александрийский. В дошедших до нас шести из 13 книг «Арифметика» содержатся задачи с решениями, в которых Диофант объясняет, как надо выбрать неизвестное, чтобы получить решение уравнения вида $ax=b$ или $ax^2=b$. Способ решения полных квадратных уравнений Диофант изложил в книгах «Арифметика», которые не сохранились.

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные.

Вот, к примеру, одна из его задач.

Задача . «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение - 96»

Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа не равны, так как если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, т.е. $10 + x$, другое же меньше, т.е. $10 - x$. Разность между ними $2x$.

Отсюда уравнение: $(10 + x)(10 - x) = 96$

или же: $100 - x^2 = 96$

$$x^2 - 4 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Отсюда $x = 2$. Одно из искомых чисел равно 12, другое 8. Решение $x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

Если мы решим эту задачу, выбирая в качестве неизвестного одно из искомых чисел, то мы придем к решению уравнения $y(20 - y) = 96,$

$$y^2 - 20y + 96 = 0. \qquad (2)$$

Ясно, что, выбирая в качестве неизвестного полуразность искомых чисел, Диофант упрощает решение; ему удается свести задачу к решению неполного квадратного уравнения (1).

3. Квадратные уравнения в Индии

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом тракте «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый- Брахмагупта (VII в.) изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$$ax^2 + bx = c, \text{ где } a > 0. \qquad (1)$$

В уравнении (1) коэффиценты, кроме *а*, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с современным.

В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары.

Задача .

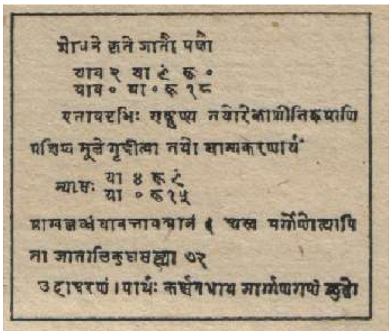


Рис. 3. Часть страницы из алгебры Бхаскары «Видиса Ганита» (вычисление корней)

«Обезьянок резвых стая

Власть поевши, развлекалась.

Их в квадрате часть восьмая

На поляне забавлялась.

А двенадцать по лианам…

Стали прыгать, повисая…

Сколько ж было обезьянок,

Ты скажи мне, в этой стае?

Решение Бхаскары свидетельствует о том, что он знал о двузначности корней квадратных уравнений. Соответствующее задаче уравнение:

$$(x/8)^2 + 12 = x$$

Бхаскара пишет под видом: $x^2 - 64x = -768$

и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 32^2, получая затем: $x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024,$

$$(x - 32)^2 = 256,$$

$$x - 32 = \pm 16,$$

$$x_1 = 16, \ x_2 = 48.$$

4. Квадратные уравнения у аль - Хорезми.

В алгебраическом трактате «Китаб аль-джебр валь-мукабала» хорезмский математик аль-Хорезми дается классификация и разъясняет приемы решения линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) «Квадраты равны корнями», т.е. $ax^2 + c = bx.$

2) «Квадраты равны числу», т.е. $ax^2 = c.$

3) «Корни равны числу», т.е. $ax = c.$

4) «Квадраты и числа равны корням», т.е. $ax^2 + c = bx.$

5) «Квадраты и корни равны числу», т.е. $ax^2 + bx = c.$

6) «Корни и числа равны квадратам», т.е. $bx + c = ax^2.$

Для аль - Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого их этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал - джабр и ал - мукабала. Его решения, конечно, не совпадает полностью с нашими. Уже не говоря о том, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида аль - Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений аль - Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем и геометрические доказательства.

Приведем пример: ***Задача.*** «Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень»*(подразумевается корень уравнения* $x^2 + 21 = 10x$*).*

Решение автора гласит примерно так: раздели пополам число корней, получишь 5, умножишь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Трактат аль - Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

5. Квадратные уравнения в Европе XIII - XVII вв.

Формулы решения квадратных уравнений по образцу аль - Хорезми в Европе были впервые изложены в « Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи. Этот объемистый труд, в котором отражено влияние математики, как стран ислама, так и Древней Греции, отличается и полнотой, и ясностью изложения. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел. Его книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и в Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из « Книги абака» переходили почти во все европейские учебники XVI - XVII вв. и частично XVIII.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду: $x^2 + bx = c$, при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов b, c было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

Выводом формулы решения квадратных уравнений общего вида занимался Виет. Однако свое утверждение он высказывал лишь для положительных корней (отрицательных чисел он не признавал).

Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам нидерландского математика А.Жирара (1595-1632), а также Декарта и Ньютона способ решения квадратных уравнений принял современный вид.

6. О теореме Виета.

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. следующим образом: «Если $B + D$, умноженное на $A - A^2$, равно BD, то A равно B и равно D».

Чтобы понять Виета, следует вспомнить, что *А*, как и всякая гласная буква, означало у него неизвестное (наше *x*), гласные же *B,D* - коэффициенты при неизвестном. На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает: если имеет место

$$(a + b)x - x^2 = ab,$$

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

$$x_1 = a, \; x_2 = b.$$

Выражая зависимость между корнями и коэффициентами уравнений общими формулами, записанными с помощью символов, Виет установил единообразие в приемах решения уравнений. Однако символика Виета еще далека от современного вида. Он не признавал отрицательных чисел и поэтому при решении уравнений рассматривал лишь случаи, когда все корни положительны.

Итак: Квадратные уравнения - это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение.

В школьном курсе математики изучаются формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые уравнения. Однако имеются и другие способы решения квадратных уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать многие уравнения. На факультативных занятиях рассматривались уравнения более сложного уровня. После изучения дополнительной литературы, методов их решения, их классификации, рассматривается **десять** способов решения квадратных уравнений.

1. Разложение левой части уравнения на множители.
2. Метод выделения полного квадрата.
3. Решение квадратных уравнений по формуле.
4. Решение уравнений с использованием теоремы Виета.
5. Решение уравнений способом «переброски».
6. Свойства коэффициентов квадратного уравнения.
7. Графическое решение квадратного уравнения.
8. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.
9. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.
10. Геометрический способ решения квадратных уравнений.

В предложенном материале есть необходимый справочный материал, а также задания с решениями и задания для самостоятельного решения.

Вызывает интерес история возникновения квадратных уравнений.

Для удобства пользования и контроля знаний в конце работы приводятся ответы на все задания для самостоятельного решения.

III.КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Общий вид квадратного уравнения

Сначала введем понятие квадратного уравнения и стандартные способы его решения.

Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где коэффициенты a, b, c - любые действительные числа, причём $a\neq 0$. Коэффициенты a, b, c, различают по названиям: a – первый или старший коэффициент; b – второй или коэффициент при x; c – свободный член, свободен от переменной x.

Пример: $5x^2+7x+3=0$ (a=5, b=7, c=3.)

$8x-3x^2+5=0$ (a=-3, b=8, c=5.)

$-3+7x+8x^2=0$ (a=8, b=7, c=-3.)

Квадратное уравнение также называют уравнением второй степени, так как его левая часть есть многочлен второй степени.

Квадратное уравнение называют **приведенным**, если старший коэффициент равен 1; квадратное уравнение называют **неприведенным**, если старший коэффициент отличен от 1.

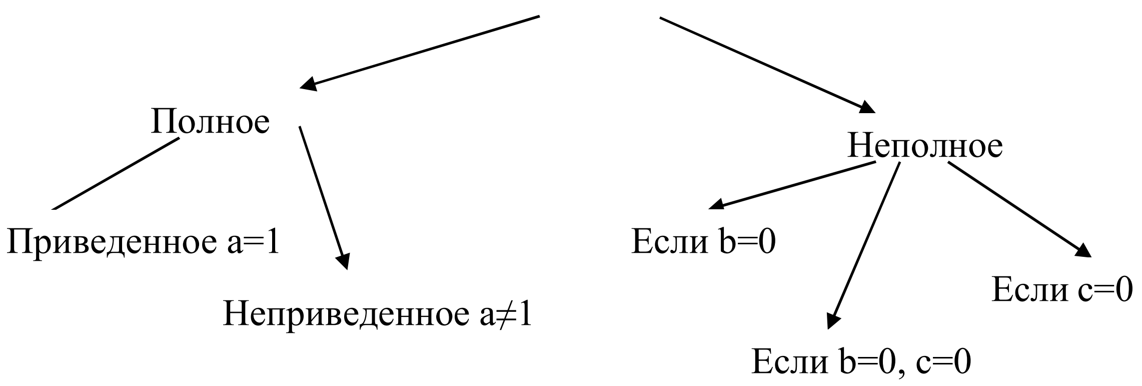
$x^2+px+q=0$ – стандартный вид приведенного квадратного уравнения.

Кроме приведенных и неприведенных квадратных уравнений различают также полные и неполные квадратные уравнения.

Полное квадратное уравнение – это квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого коэффициенты b и c отличны от нуля.

Неполное квадратное уравнение – это уравнение, в котором присутствуют не все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов b и c равен нулю.

Квадратное уравнение



Корнем квадратного уравнения ах²+вх+с=0 называют всякое значение переменной х, при котором квадратный трехчлен ах²+bх+с обращается в нуль; такое значение переменной х называют также корнем квадратного трехчлена.

Решить квадратное уравнение – это значит найти все его корни или установить, что их нет.

§2. Решение неполных квадратных уравнений.

Сначала математики научились решать неполные квадратные уравнения, поскольку для этого не пришлось, как говорится, ничего изобретать.

Существует три вида неполных квадратных уравнений:

1) $ax^2 = 0 (b = c = 0)$.Это уравнение имеет один корень $x = 0$.

2) $ax^2 + c = 0 (b = 0, ac \neq 0)$. Если a и c – числа одного знака, то уравнение не имеет действительных корней; если a и c - числа разных знаков, то уравнение имеет два различных действительных корня

$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$;

Например, уравнение $2x^2 + 3 = 0$ не имеет корней, а уравнение $-4x^2 + 9 = 0$ имеет два различных корня $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2} = \pm 1{,}5$;

3) $ax^2 + bx = 0$ $(ab \neq 0, c = 0)$.Это уравнение имеет два различных действительных корня, для нахождения, которых вынесем x за скобки:

$(ax^2 + bx = 0) \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ и $x = -\frac{b}{a}$;(см. приложение 1)

Условия $ab \neq 0, c = 0$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы квадратное уравнение имело один корень, равный нулю.

§3. Традиционные методы решения квадратных уравнений.

***1 метод*:**

а) Решение квадратных уравнений по формуле.

Выведем формулу для решения полных квадратных уравнений:

Сначала разделим обе части уравнения $ax^2+bx+c=0$ на $a\neq 0$ - от этого его корни не изменятся. Для решения получившегося уравнения

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ выделим в левой части полный квадрат

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2)-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}=(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Для краткости обозначим выражение b^2-4ac через D. Выражение b^2-4ac называется *дискриминантом* квадратного уравнения («дискриминант» по-латыни – различитель).

Тогда полученное выражение принимает вид: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}$.

Возможны 3 случая:

а) Если число D положительно(D>0), то в этом случае можно извлечь из D квадратный корень и записать D в виде $D=(\sqrt{D})^2$.Тогда $\frac{D}{4a^2}=\frac{(\sqrt{D})^2}{(2a)^2}=(\frac{\sqrt{D}}{2a})^2$,

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\sqrt{D}}{2a})^2$.По формуле разности квадратов выводим:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a})=(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a})(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}).$$

В силу теоремы (Если выполняется тождество $x^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,то квадратное уравнение $x^2+bx+c=0$ при $x_1\neq x_2$ имеет два корня x_1 и x_2 ,а при $x_1=x_2$ - лишь один корень x_1) из тождества

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a})=(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a})(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a})$$

Следует, что уравнение $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, а значит и уравнение $ax^2+bx+c=0$

Имеет два корня: $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Обычно эти корни записывают одной формулой.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Пример. Решим уравнение $4x^2-7x+3=0$.

Решение.

В данном случае a=4, b=-7, c=3 и, потому, $D=(-7)^2-4\cdot 4\cdot 3=49-48=1$.

Значит, $x_{1,2}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 4}=\frac{7\pm 1}{8}$. Имеем $x_1=\frac{7+8}{8}=1$, $x_2=\frac{7-1}{8}=\frac{3}{4}$. Ответ: $\frac{3}{4}$;1

б) Если число D равно нулю, то тождество $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}$. принимает вид $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+\frac{b}{2a})^2$. Отсюда следует, что при D=0 уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет один корень $x_1=-\frac{b}{2a}$.

Пример. Решим уравнение $4x^2+12x+9=0$.

Решение.

Имеем a=4, b=12, c=9 и поэтому $D=b^2-4ac=12^2-4\cdot 4\cdot 9=0$.

Значит, $x_1=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2\cdot 4}=-\frac{3}{2}$. Ответ: $-\frac{3}{2}$.

Уравнения, где D=0, можно решить путем собирания по формуле квадрата суммы или разности, в зависимости от знака переменной b.

Пример. Решим уравнение $9x^2+24x+4=0$.

Решение.

Соберем по формуле квадрат суммы и получим $(3x+2)^2=0$.

Получаем $3x=2$, а отсюда $x_1=\frac{2}{3}$. Ответ: $x_1=\frac{2}{3}$

в) Если число D отрицательно (D<0), то –D>0, и потому, выражение $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{D}{4a^2}$. является суммой двух слагаемых, одно из которых неотрицательно (больше или равно нулю), а другое положительно.

Такая сумма не может равняться нулю, поэтому уравнение $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ не имеет действительных корней. Не имеет корней и уравнение $ax^2+bx+c=0$.

Пример. Решим уравнение $x^2+4x+7=0$.

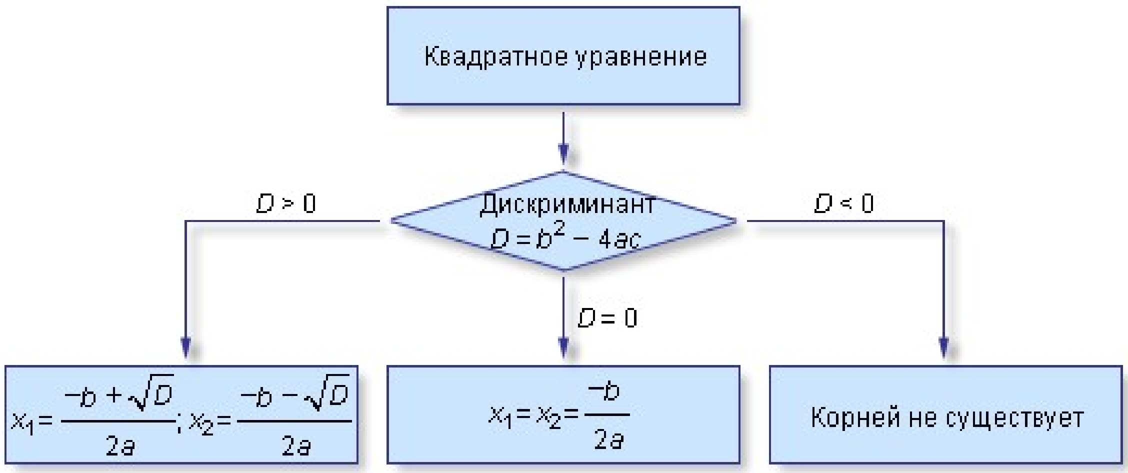
Решение.

Имеем a=1, b=4, c=7 и поэтому $D=4^2-4\cdot 1\cdot 7=16-28=-12$. D<0, следовательно уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: корней нет.

Формула корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ позволяет найти корни ***любого*** квадратного уравнения, если они есть (см. приложение 2), в том числе приведенного и неполного.

Словесно формула выражается так: *корни квадратного уравнения равны дроби, числитель которой равен второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, плюс минус корень квадратный из квадрата этого коэффициента без учетверенного произведения первого коэффициента на свободный член, а знаменатель есть удвоенный первый коэффициент.*



б) Решение квадратных уравнений с чётным вторым коэффициентом.

Математики никогда не пройдут мимо возможности облегчить себе вычисления. Они обнаружили, что формулу: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ можно упростить в случае, когда коэффициент *в* имеет вид *в = 2k* , если *в* – четное число.

Квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом обычно записывается в виде $ax^2 + 2kx + c = 0$ (k - целое число). Корни этого квадратного уравнения удобно вычислять по формуле $x = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a}$, где *D=k² – ac.*

Пример: $3x^2 - 14x + 16 = 0.$

Решение:

a = 3, в = - 14, c = 16, k = - 7;

D=k² – ac. D= (-7)² - 3·16 = 49 – 48 = 1, D>0, два различных корня;

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{3} = \frac{7 \pm 1}{3}; x_1 = 2; x_2 = \frac{8}{3}.\ \text{Ответ: } 2; 2\frac{2}{3}.$$

в) *Решение приведённых квадратных уравнений.*

Приведенным квадратным уравнением называется уравнение вида $x^2 + px + q = 0$, в котором *a = 1, в = p* и *с = q*.

Корни приведенного квадратного уравнения можно найти по следующей формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \text{или} \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Р со знаком взяв обратным

На 2 мы его разделим,

И от корня аккуратно знаком $-,+$ *отделим,*

А под корнем очень кстати

Половина р в квадрате,

Минус q - вот решение небольшого уравнения.

Пример: $x^2 - 14x - 15 = 0.$

Решение: имеем $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm \sqrt{64} = 7 \pm 8.$

$x_1 = 15; x_2 = -1.$

Ответ: -1;15.

***2 метод*. Решение уравнений с использованием теоремы Виета.**

По праву достойна в стихах быть воспета,

О свойствах корней теорема Виета.

Скажи мне, что лучше такого:

Умножить ты корни и дробь уж готова,

В числителе «с» в знаменателе «а»,

А сумма корней тоже дроби равна,

Хоть с минусом дробь эта, что за беда

В числителе «b» в знаменателе «а»

ФРАНСУА ВИЕТ (1540 - 1603)

- французский математик, ввел систему алгебраических символов, разработал основы элементарной алгебры. Он был одним из первых, кто числа стал обозначать буквами, что существенно развило теорию уравнений.

Теорема 1.

Сумма корней квадратного уравнения равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком и деленному на коэффициент при x^2; произведение корней этого уравнения равно свободному члену, деленному на коэффициент при x^2 : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема 2(обратная).

Если выполняются равенства $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$,

То числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Доказательство. Выше мы вывели тождество

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}) = (x - \frac{-b+\sqrt{D}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{D}}{2a})$$ и

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Из этих тождеств следует, что $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$,

Где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Раскроем скобки в правой части этого тождества: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2$, то есть $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$

Отсюда следует, что $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

По теореме Виета **удобнее** всего решать **приведенные квадратные уравнения.**

Приведенное квадратное уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0.$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при a=1 имеет вид $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p. \end{cases}$

а) Если свободный член q приведенного квадратного уравнения положителен, то уравнение имеет два корня и это зависит от второго коэффициента p. Если $p>0$, то оба корня отрицательны, если $p<0$, то оба корня положительны.

Примеры:

1. $x^2 - 3x + 2 = 0; x_1 = 2, x_2 = 1, так\ как\ q = 2 > 0\ и\ p = -3 < 0.$

2. $x^2 + 8x + 7 = 0; x_1 = -7, x_2 = -1. так\ как\ q = 7 > 0\ и\ p = 8 > 0.$

б) Если свободный член *q* приведенного уравнения отрицателен, то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p<0$, или отрицателен, если $p>0$.

3. $x^2+4x-5=0; x_1=-5, x_2=1,$ *так как* $q=-5<0$ *и* $p=4>0.$

4. $x^2-8x-9=0; x_1=9, x_2=-1,$ *так как* $q=-9<0$ *и* $p=-8<0.$

5.Подбором найти корни уравнения $x^2-5x+6=0.$

Решение: здесь p=-5, q=6. Подберем два числа x_1 и x_2 так, чтобы

$$x_1+x_2=5,\ x_1\cdot x_2=6.$$

Заметив, что 6=2·3, а 2+5=5, по теореме, обратной теореме Виета, получаем, что $x_1=2$, $x_2=3$ – корни уравнения $x^2-5x+6=0.$

Ответ: 2; 3.

Если q>0,

то корни одинаковых знаков

Если $(x_1+x_2)>0$, то

Если $(x_1+x_2)<0$,то

Если q<0,

то корни разных знаков

Если $(x_1+x_2)>0$,то больший корень положительный

Если $(x_1+x_2)<0$,то меньший корень положительный

Примеры.

1. Решим квадратное уравнение $x^2-6x+8=0$ используя теорему Виета.

Решение.a=1, b=-6, c=8, следовательно, $x_1+x_2=-\frac{-6}{1}=6$, $x_1x_2=\frac{8}{1}=8$. Подбираем корни , получаем

$x_1=4$, $x_2=2$.

Ответ: 2;4.

2.Решим квадратное уравнение $2x^2-10x+12=0$ используя теорему Виета.

Решение.a=2, b=-10, c=12, следовательно, $x_1 + x_2 = -\frac{-10}{2} = 5$, $x_1 x_2 = \frac{12}{2} = 6$. Подбираем корни и получаем $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Ответ: 2

<u>3 метод</u>. Разложение левой части уравнения на множители.

Пример 1: решить уравнение $x^2-4x+3=0$

Решение:

Рассмотрим квадратный трехчлен x^2-4x+3 и разложим его на множители, используя способ группировки: $x^2-4x+3= x^2-x-3x+3=(x^2-x)-(3x-3)=x(x-1)-3(x-1)=(x-1)(x-3)$.

Следовательно, уравнение можно переписать так: $(x-1)(x-3)=0$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

т.е. $x - 1 = 0$, *или* $x - 3 = 0$

$x = 1$. $x = 3$.

Ответ: 2; 3.

Пример 2: решить уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$;

Решение: Разложим левую часть уравнения на множители, используя способ группировки:

$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2)$.

Следовательно, уравнение можно переписать так: $(x + 12)(x - 2) = 0$.

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

т.е. $x + 12 = 0$, или $x - 2 = 0$,

$x = -12$. $x = 2$.

Ответ: -12; 2.

Пример 3: решить уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Решение: $(x^2 + 2x) + (x + 2) = 0$;

$x(x + 2) + (x + 2) = 0$;

$(x + 1)(x + 2) = 0$;