ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ТЮМЕНСКОЙ ОБЛАСТИ
«ЗАВОДОУКОВСКИЙ АГРОПРОМЫШЛЕННЫЙ ТЕХНИКУМ»

**ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

для обучающихся по специальности
10.02.01 Организация и технология защиты информации

Заводоуковск,
2017

**Аннотация**

Настоящие методические указания по выполнению практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 Математика предназначены для обучающихся по специальности 10.02.01 Организация и технология защиты информации.

В методических указаниях обозначена тематика практических работ в соответствии с рабочей программой и предложены рекомендации по их выполнению.

Разработчик: Сычева Ж.П., преподаватель высшей квалификационной категории

Методические указания рассмотрены
и рекомендованы
на заседании ПЦК преподавателей общеобразовательных дисциплин
Протокол № ____ «____» _______ 2017 года
Председатель ПЦК __________ Л.В. Темпель

## СОДЕРЖАНИЕ

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических работ составлен в соответствии с рабочей программой по дисциплине ЕН.01 Математика по программе подготовки специалистов среднего звена по специальности 10.02.01. Организация и технология защиты информации (пр.№805 от 28.07.14г.). Учебным планом предусмотрено 48 часов практических занятий.

Цель выполнения практических работ:

- обобщение и углубление теоретических знаний на практике;
- формирование умений применять знания на практике;
- развитие творческой инициативы при выполнении заданий.

В результате выполнения практических работ обучающийся должен:

*знать:*

– основы линейной алгебры и аналитической геометрии;
– основные положения теории множеств, классов вычетов;
– основные численные методы решения математических задач;
– основные понятия и методы дифференциального и интегрального исчисления;
– основы теории комплексных чисел;
– основы теории рядов;

*уметь:*

– выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
– выполнять операции над множествами;
– применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
– решать дифференциальные уравнения;
– выполнять операции над комплексными числами;
– использовать математический аппарат при решении прикладных задач;
– пользоваться пакетами прикладных программ для решения вероятностных и статистических задач.

Компетенции, формируемые в результате выполнения практических заданий:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, обладать высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности в области обеспечения информационной безопасности.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.4. Участвовать во внедрении разработанных организационных решений на объектах профессиональной деятельности.

Методические рекомендации по выполнению практических заданий:

1. внимательно изучите задание;
2. запишите тему занятия в тетради;
3. просмотрите теоретический материал;
4. выполните задания по теме;
5. ответьте на контрольные вопросы.

Критерий оценки:

70% выполненной работы и менее – оценка «2»,
71% – 80% - оценка «3»,
81% – 90% - оценка «4»,
91% – 100% - оценка «5».

## Практическое занятие № 1
## Тема: Выполнение действий с матрицами

**Цель:** научится выполнять действия с матрицами: умножение матрицы на число, умножение матриц, сложение матриц, вычитание матриц, транспонирование матриц.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3.

Время выполнения 2 часа.

### Теоретический материал

Матрицей размера *m*x*n* называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов.

Суммой двух матриц *A* и *B* называется матрица *C*, элементы которой равны сумме соответствующих элементов данных матриц $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведением числа *m* на матрицу *A* называется матрица *C*, элементы которой равны произведению данного числа на элементы данной матрицы $c_{ij} = m \cdot a_{ij}$.

Произведением двух матриц *A* и *B* называется матрица *C*, элементы которой, стоящей в $i$ – ой строке и $j$ – ом столбце, равен сумме произведений соответственных элементов $i$ – ой строки матрицы $A$ и $j$ – ого столбца матрицы $B$.

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется.

Транспонированием матрицы называется изменение положения строк и столбцов, т.е. строка становиться столбцом, а столбец – строкой.

*Пример*. Найти сумму и произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

*Решение:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+3 \\ 0+4 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot4 & 1\cdot3+3\cdot1 \\ 0\cdot1+5\cdot4 & 0\cdot3+5\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}$$

### Задания:

1. Выполните умножение следующих матриц на число 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \\ 9 & 11 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Найдите сумму матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Найдите матрицу $2A + 5B$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Найдите произведение матриц $AB$ и $BA$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Найдите произведение матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$

6. Выполните транспонирование матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-b & \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix}$$

**Контрольные вопросы:**

1. Как выполняется произведение матрицы на число?
2. Как выполняется произведение матриц?
3. Как выполняется сложение матриц?
4. Как выполняется транспонирование матрицы?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

## Практическое занятие № 2
## Тема: Вычисление определителя и нахождение обратной матрицы

**Цель:** научится вычислять определители, находить обратную матрицу, ранг матрицы и алгебраические дополнения.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 4, ОК 5.

Время выполнения 2 часа.

### Теоретический материал

*Определителем первого порядка* называется число, равное элементу определителя.

*Определителем второго порядка* называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

*Определителем третьего порядка* называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 .$$

*Свойства определителя:*

1. Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами.
2. Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению его на –1.
3. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.
4. Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число равносильно умножению определителя на это число.
5. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.
6. Если элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю
7. Определитель равен сумме произведений элементов какого – нибудь столбца или строки на их алгебраические дополнения.

*Минором* некоторого элемента определителя называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

*Алгебраическим дополнением* некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{s+k}$, где $s$ – номер строки и $k$ – номер столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

*Рангом* матрицы $A$ называется порядок ненулевого минора исходного определителя.

Матрица $B$ называется *обратной* по отношению к матрице $A$, если произведения $AB$ и $BA$ равны единичной матрице, т.е. $AB=BA=E$, и обозначается $A^{-1}$.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Найти определитель данной матрицы. Если определитель равен нулю, то данная матрица не имеет обратной.
2. Транспонировать данную матрицу.
3. Найти алгебраические дополнения и составить из них присоединенную матрицу $\widetilde{A}$.
4. Найти обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\widetilde{A}$.
5. Выполнить проверку $AB=BA=E$.

*Пример*. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

*Решение*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 2 + 0\cdot 4\cdot 3 + (-3)\cdot 6\cdot 1 - (-3)\cdot 4\cdot 3 - 0\cdot 6\cdot 2 - 1\cdot 4\cdot 1 = 8 - 18 + 36 - 4 = 22.$$

*Пример*. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

*Решение*:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 0 = 3$.
2. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $A_{11} = (-1)^{1+1}|3| = 3$  $A_{12} = (-1)^{1+2}|2| = -2$  $A_{21} = (-1)^{2+1}|0| = 0$  $A_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1$

   $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
5. $A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot \begin{pmatrix} 3+0 & 6-6 \\ 0+0 & 0+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Задания:**

1. Вычислите определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$  3) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$  4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$

2. Решите уравнение и неравенство:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ и $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$

3. Определите ранг матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}\lambda & 5\lambda & -\lambda\\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda\\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda\end{pmatrix}$

4. Найдите обратные матрицы:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}4 & -8 & -5\\ -4 & 7 & -1\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$

**Контрольные вопросы:**

1. Как находится определители первого, второго и третьего порядка?
2. Как найти ранг матрицы?
3. Как находится обратная матрица?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

**Практическое занятие № 3**

**Тема: Решение системы линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса**

**Цель:** научится находить решения линейных систем линейных уравнений (СЛУ) методами Крамера и Гаусса.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 4, ОК 5, ОК 8, ОК 9, ПК 1.4.

Время выполнения 4 часа.

**Теоретический материал**

Алгоритм решения систем линейных уравнений методом Крамера:

1. Найти определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

   Если он равен нулю, значит СЛУ не имеет решений.

2. Найти определитель $\Delta_X = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.
3. Найти определитель $\Delta_Y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$.
4. Найти определитель $\Delta_Z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$
5. Найти *x, y* и *z* по формулам: $x = \dfrac{\Delta_X}{\Delta}, \quad y = \dfrac{\Delta_Y}{\Delta}, \quad z = \dfrac{\Delta_Z}{\Delta}$.
6. Выполнить проверку.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных и получении системы линейных уравнений ступенчатого вида..

Пусть дана СЛУ $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & (a) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 & (б) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 & (в) \end{cases}$.

Алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса:

1.Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Делим уравнение (*а*) на $a_{11}$, умножаем полученное уравнение $a_{21}$ и вычитаем из (*б*); затем умножаем на $a_{31}$ и вычитаем из (*в*). В результате получаем систему

$$\begin{cases} x + d_{12}y + d_{13}z = c_1 & (г) \\ d_{22}y + d_{23}z = c_2 & (д) \\ d_{32}y + d_{33}z = c_3 & (е) \end{cases}$$

2.Выполняем действия с уравнениями *г, д* и *е* такие же, что с уравнениями *а, б, в*. В итоге получается система вида:

$$\begin{cases} x + d_{12}y + d_{13}z = c_1 \\ y + e_{23}z = e_2 \\ z = f_3 \end{cases}$$

3.Выполнить проверку.

*Пример*. Найдите решение системы линейных уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$.

*Решение*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) [1]-[2]\cdot 3,\ [1]\cdot 4-[3]\cdot 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 11 & -11 & 11 \end{pmatrix} [3]/11 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} [2]+[3] \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ -y+4z=5 \\ 3z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ -y+4z=5 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y+2=5 \\ -y+4\cdot 2=5 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2\cdot 3+2=5 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}.$$

Проверка: $\begin{cases} 3\cdot(-1)+2\cdot 3+2=-3+6+2=5 \\ -1+3-2=0 \\ 4\cdot(-1)-3+5\cdot 2=-4-3+10=3 \end{cases}$ *Ответ*: $x=-1, \quad y=3, \quad z=2$.

**Задания:**

1. Решите системы уравнений методом Крамера:

1) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$

2. Решите системы уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5 \\ 2x_1-x_2-3x_3=-4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3-2x_4=-4 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4=-2 \\ x_1-x_2-x_4=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+2x_4=18 \\ -x_1-x_2+2x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-2x_4=1 \end{cases}$

**Контрольные вопросы:**

1. Как найти решение СЛУ методом Крамера?
2. Как найти решение СЛУ методом Гаусса?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

## Практическое занятие № 4
## Тема: Составление уравнений прямых и плоскостей

**Цель:** научится составлять уравнения прямых и плоскостей.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК 4, ОК 9.

Время выполнения 4 часа.

### Теоретический материал

Любое уравнение первой степени относительно *x* и *y* вида $Ax+By+C=0$, где *A, B, C* - постоянные коэффициенты, причем $A^2+B^2\neq 0$, определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называют *общим уравнением прямой*.

Если в общем уравнении прямой $B\neq 0$, то, разрешив его относительно *y*, получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом* $y=kx+b$, где $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$.

Если в общем уравнении прямой $C\neq 0$, то, разделив все его члены на $-C$, получим *уравнение прямой в отрезках* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$.

*Острый угол между прямыми* $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется по формуле $tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

*Условие параллельности* прямых имеет вид $k_1=k_2$.

*Условие перпендикулярности* прямых имеет вид $k_1=-\frac{1}{k_2}$.

*Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходит через точку* $M(x_1;y_1)$ имеет вид $y-y_1=k(x-x_1)$.

*Уравнение прямой, проходящей через точки* $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, имеет вид $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и *угловой коэффициент* этой прямой находится по формуле $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Если обе части общего уравнения прямой умножить на нормирующий множитель $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, причем знак перед радикалом выбирается при условии $\mu\cdot C<0$, то получим *нормальное уравнение прямой* $x\cdot\cos\varphi+y\cdot\sin\varphi-p=0$.

*Расстояние от точки* $M_0(x_0;y_0)$ *до прямой* $Ax+By+C=0$ находится по формуле $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

*Биссектриса углов между прямыми* $A_1x+B_1y+C_1=0$ *и* $A_2x+B_2y+C_2=0$ имеют вид $\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0$.

*Общее уравнение плоскости* имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, где $A^2+B^2+C^2\neq 0$. *A, B, C* - координаты вектора $N=Ai+Bj+Ck$, перпендикулярного плоскости, называемого *нормальным вектором плоскости.*

Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду необходимо все члены уравнения умножить на нормирующий множитель $\mu=\pm\frac{1}{N}=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

*Уравнение плоскости в отрезках* имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$.

*Угол $\varphi$ между плоскостями* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *и* $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется по формуле $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

*Условие параллельности* плоскостей $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

*Условие перпендикулярности* плоскостей $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

*Расстояние от точки* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *до плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

*Уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *и перпендикулярной вектору* $N=Ai+Bj+Ck$ имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

*Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *и* $M_3(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

*Уравнение прямой, проходящей через точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, имеет вид $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

*Пример.* Дано общее уравнение прямой $12x-5y-65=0$. Написать: 1) уравнение прямой с угловым коэффициентом; 2)уравнение в отрезках; 3) нормальное уравнение прямой.

*Решение*:

1) $-5y=65-12x \qquad y=\dfrac{12}{5}x-13$.

2) Перенесем свободный член в правую часть и разделим на 65 $\dfrac{12x}{65}-\dfrac{5y}{65}=1$ $\Rightarrow\dfrac{x}{65/12}+\dfrac{5y}{(-65/5)}=1$.

3) Находим нормирующий множитель $\mu=\dfrac{1}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\dfrac{1}{13}$. Умножив обе части общего уравнения на этот множитель, получаем нормальное уравнение прямой $\dfrac{12}{13}x-\dfrac{5}{13}y-5=0$.

**Задания:**

1. Дано общее уравнение прямой $12x-5y-65=0$. Напишите: 1) уравнение с угловым коэффициентом; 2) уравнение в отрезках; 3) нормальное уравнение.
2. Определите острый угол между прямыми $y=-3x+7$ и $y=2x+1$.
3. Покажите, что прямые $4x-6y+7=0$ и $20x-30y-11=0$ параллельны.
4. Покажите, что прямые $3x-5y+7=0$ и $10x+6y-3=0$ перпендикулярны.
5. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1;3)$ и $N(2;5)$.
6. Даны вершины треугольника: $A$ (2; 2), $B$ (– 2; – 8) и $C$ (– 6; – 2). Составьте уравнения медиан треугольника.
7. Даны вершины треугольника: $A$ (0; 1), $B$ (6; 5) и $C$ (12; – 1). Составьте уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины $C$.

8. Даны стороны треугольника: $x + 3y - 7 = 0$ ($AB$), $4x - y - 2 = 0$ ($BC$), $6x + 8y - 35 = 0$ ($AC$). Найдите длину высоты, проведенной из вершины $B$.
9. Уравнение плоскости $2x + 3y - 6z + 21 = 0$ приведите к нормальному виду.
10. Определите расстояние от точки $M_0(3;5;-8)$ до плоскости $6x - 3y + 2z - 28 = 0$.
11. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;5)$ и перпендикулярно вектору $N = 4i + 3j + 2k$.
12. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-1;4)$ и $B(3;2;-1)$ перпендикулярно плоскости $x + y + 2z - 3 = 0$.
13. Найдите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $P(4;-2;1)$ и $Q(2;4;-3)$.
14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5;3;4)$ и параллельной вектору $s = 2i + 5j - 8k$.

**Контрольные вопросы:**

1.По каким формулам можно найти уравнения прямой и плоскости?

2.Как найти угол между прямыми?

3.Как найти угол между плоскостями?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

**Практическое занятие № 5**
**Тема: Составление уравнений кривых второго порядка**

**Цель:** научится составлять уравнения кривых второго порядка, находить полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, параметр параболы.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК 4.

Время выполнения 2 часа.

**Теоретический материал**

*Окружность* – это множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Если $r$ – радиус окружности, а точка $C(a;\ b)$ – ее центр, то уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности имеет вид: $x^2+y^2=r^2$. Общее уравнение окружности имеет вид $x^2+y^2+lx+my+n=r^2$, где $l=-2a$, $m=-2b$, $n=a^2+b^2-r^2$.

*Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают 2а), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Фокусы имеют следующие координаты: $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$.

Каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a$ – большая полуось эллипса, $b$ – малая полуось, $c$ - половина расстояния между фокусами, причем $a^2=b^2+c^2$.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом* $e=\frac{c}{a}$ (т.к. $c<a$, то $e<1$).

Расстояния некоторой точки эллипса $M$ от его фокусов называются *фокальными радиусами – векторами* этой точки. Их обозначают $r_1$ и $r_2$, а в силу определения эллипса для любой его точки $r_1+r_2=2a$.

*Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами.

Фокусы имеют следующие координаты: $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$. Каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=c^2-a^2$, причем $2a$ – действительная ось, $2b$ – мнимая ось гиперболы.

Вершины гиперболы имеют координаты $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$.

Отношение $e=\frac{c}{a}>1$ называется *эксцентриситетом*.

*Параболой* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*. Если директрисой параболы является прямая $x=-\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, то уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$. Эта парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс.

Уравнение $x^2=2py$ является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат.

*Пример.* Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

*Решение*: $\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=\frac{225}{225}\Rightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{25y^2}{9}=1$. 1) $a$=5, $b$=3;

2) $a^2=b^2+c^2\Rightarrow c^2=a^2-b^2=25-9=16\Rightarrow c=4\Rightarrow$ $F_1(4;0)$ и $F_2(-4;0)$; 3) $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

## Задания:

1. Найдите координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.
2. Составьте уравнение окружности, проходящей точки $A(5; 0)$ и $B(1; 4)$, если ее центр лежит на прямой $x + y - 3 = 0$.
3. Составьте уравнение хорды окружности $x^2+y^2=49$, делящейся в точке $A(1; 2)$ пополам.
4. Найдите уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2+y^2=2x+4y-4$ относительно прямой $x - y - 3 =0$.
5. Составьте каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ и $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.
6. На эллипсе $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ найдите точку, разность фокальных радиус – векторов которой равна 6,4.
7. Пользуясь определением эллипса, составьте его уравнение, если известно, что точки $F_1(0;0)$ и $F_2(1;1)$ являются фокусами эллипса, а длина большой оси равна 2.
8. Эллипс, отнесенный к осям, проходит через точку $M(1;1)$ и имеет эксцентриситет $e=\frac{3}{5}$. Составьте уравнение эллипса.
9. На правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ найдите точку, расстояние которой от правого фокуса в два раза меньше ее расстояния от левого фокуса.
10. Даны точки $A(-1;0)$ и $B(2;0)$. Точка $M$ движется так, что в треугольнике $AMB$ угол $B$ остается вдвое больше $A$. Найдите уравнение кривой, которую опишет точка $M$.
11. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составьте простейшее уравнение гиперболы, проходящей через точку $M\left(\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$.
12. Составьте уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(9;8)$, если асимптоты гиперболы имеют уравнения $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$.
13. Найдите фокальные радиусы – векторы гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ в точках пересечения ее с окружностью $x^2+y^2=91$.
14. Составьте уравнение параболы, симметричной относительно оси $Ox$, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси $Ox$, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.
15. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси $Oy$ и отсекающей на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.
16. Составьте простейшее уравнение параболы, если известно, что ее фокуса находится в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью $Ox$.
17. На параболе $y^2=8x$ найдите точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

**Контрольные вопросы:**

1. Как записываются уравнения гиперболы, окружности, параболы и эллипса?
2. Как найти эксцентриситет для различных функций?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

**Практическое занятие № 6**
**Тема: Вычисление пределов последовательностей**

**Цель:** научится вычислять пределы последовательностей.
Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 4, ОК 9.
Время выполнения 4 часа.

**Теоретический материал**

Число $a$ называется пределом последовательности $x_1, x_2, ....x_n, ...$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ найдется такое положительное число N, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при *n*>*N*. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Число *A* называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Условно записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| < M$ при $0 < |x - a| < \delta$, где M - произвольное положительное число. В этом случае функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$.

Если $x < a$ и $x \to a$, то употребляют запись $x \to a - 0$; если $x > a$ и $x \to a$, то употребляют запись $x \to a + 0$. Числа $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называются соответственно левым и правым пределом функции $f(x)$ в точке *a*.

Для существования предела передела функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы $f(a-0) = f(a+0)$.

Вычисление пределов основывается на следующих теоремах:

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \left(при \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0\right).$

Замечательные пределы:

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, e=2,71828…

*Пример*. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+4}$.

*Решение:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+4} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{(n+4)\cdot n\cdot\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{4}{n}} = e^1 = e$

## Задания:

1) Вычислите пределы последовательностей и функций

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n+5}{2n+7}$

2. $\lim\limits_{n \to 3} \frac{n^2-9}{n^2-3n}$

3. $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{m^3-m^2-m-1}{m^3+m^2-m-1}$

4. $\lim\limits_{x \to 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$

8. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$

9. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$

10. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

2) Вычислите пределы с помощью замечательных пределов

11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{x}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2}$

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgmx}{\sin nx}$

15. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx-\sin x}{\sin 3x}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$

3) Вычислите пределы с помощью правила Лапиталя

19. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

20. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{tgx}$

21. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

22. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x}$

**Контрольные вопросы:**

1. Что такое предел последовательности?
2. Как раскрываются неопределенности $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

## Практическое занятие № 7
## Тема: Вычисление производных и дифференциалов элементарных функций

**Цель:** научится вычислять производные и дифференциалы функций.
Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК 8, ОК 9.
Время выполнения 2 часа.

### Теоретический материал

Производной функции *y=f(x)* в точке $x_0$ называется пределом при $\Delta x \to 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента (при условии, что этот предел существует).

Производная обозначается $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Итак, по определению, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Нахождение производной называется *дифференцированием функции.*

Производные можно находить с помощью формул дифференцирования:

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
6. $(Cu)' = Cu'$
7. $(x^n)' = nx^{n-1}$
8. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
9. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
10. $(\sin x)' = \cos x$
11. $(\cos x)' = -\sin x$
12. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
13. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
14. $(e^x)' = e^x$
15. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
16. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
17. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
18. $(\lg x)' = \dfrac{1}{x} \cdot 0{,}4343$
19. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
22. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

*Пример.* Используя формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x) = 5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2tgx - 3ctgx + \log_2 x + 3\ln x$.

*Решение:*

$$f'(x) = (5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2tgx - 3ctgx + \log_2 x + 3\ln x)' = (5)' + (x^3)' + (3x^2)' +$$

$$+ (\sin x)' + (\cos x)' + (2tgx)' - (3ctgx)' + (\log_2 x)' + (3\ln x)' = 3x^2 + 6x + \cos x - \sin x + \frac{2}{\cos^2 x} +$$

$$+ \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{x}\log_2 e + \frac{3}{x};$$

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x$, т.е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение $\Delta y$ можно записать в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + a(\Delta x)\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a(\Delta x) = 0$.

Главная, линейная относительно $\Delta x$ часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции называется *дифференциалом* функции и обозначается $dy$: $dy = f'(x)\Delta x$. (1)

Положив в формуле (1) $f(x) = x$, получим $dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, окончательно соотношение (1) принимает вид $dy = f'(x)dx$. (2)

При достаточно малых $\Delta x$ приращение функции приближенно равно ее дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$.

*Пример.* Найти дифференциал функции $y = x^2 + x + 1$ в точке $x$=2, причем сделать это двумя способами: 1) выделяя главную, линейную относительно Δx часть приращения функции $\Delta y$; 2) по формуле (2).

*Решение:*

1) $$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(2+\Delta x) - f(2) = \left[(2+\Delta x)^2 + (2+\Delta x) + 1\right] - \left[2^2 + 2 + 1\right] = \\ = 5\Delta x + (\Delta x)^2,$$

Отсюда $dy = 5\Delta x$;

2) по формуле (2) $dy = (x^2 + x + 1)'dx = (2x+1)dx, f'(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Следовательно, получаем $dy = 5dx = 5\Delta x$.

**Задания:**

1) Найдите производные функций:

1. $y = \log_2 x + 3\log_3 x$
2. $y = 4e^x + arctgx + \arcsin x$
3. $y = 5^x + 6^x + \left(\dfrac{1}{7}\right)^x$
4. $y = \sqrt[7]{x} \cdot \ln x$
5. $y = x^2 \cdot \log_3 x$
6. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
7. $y = \dfrac{ctgx}{\sqrt{x}}$
8. $y = \sqrt{1 + 5\cos x}$
9. $y = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}$
10. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$

2) Найдите дифференциалы функций:

1. $y = 3 + 4x^5 + \sqrt[5]{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \sin x + \cos x + \ln x$
2. $y = x^2 \cdot tgx$
3. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$
4. $y = \dfrac{x \cdot tgx}{1+x^2}$
5. $y = \sin(x^2 + 5x + 2)$
6. $y = \ln\sin x$
7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot arctg\dfrac{x}{\sqrt{3}}$
8. $y = \sin^2 x^3$

**Контрольные вопросы:**
1. Перечислите формулы дифференцирования.
2. Как находятся дифференциал функции?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

## Практическое занятие № 8
## Вычисление производных и дифференциалов высших порядков

**Цель:** научится вычислять производные и дифференциалы высших порядков.
Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК 8, ОК 9.
Время выполнения 2 часа.

### Теоретический материал

Производная $f'(x)$ называется *производной первого порядка*. Производная от $f'(x)$ называется *производной второго порядка (*или второй производной*)* от функции $f(x)$ и обозначается $y''$*или* $\_\ f''(x)$. Производная от $f''(x)$ называется *производной третьего порядка* (или третьей производной ) от функции $f(x)$ и обозначается $y'''$*или* $\_\ f'''(x)$ и т.д.

Дифференциал $dy = f'(x)dx$ называется *дифференциалом первого порядка.*

Дифференциал *d(dy)* от дифференциала *dy* называется *дифференциалом второго порядка* функции *f(x)* и обозначается $d^2y$ называется *дифференциалом третьего порядка* функции *f(x)* и обозначается $d^3y$ и т.д.

Дифференциал $d\left(d^{n-1}y\right)$ от дифференциала $d^{n-1}y$ называется *дифференциалом n-го порядка* функции *f(x)* и обозначается $d^ny$.

Дифференциал *n*-го порядка индуктивно определяется по формуле

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n, n = 1,2...,$$

Откуда $y^{(x)} = \dfrac{d^n y}{(dx)^n}$, т.е. *n*-я производная функции *y=f(x)* в некоторой точке *x* равна отношению *n*-го дифференциала этой функции в точке *x* к дифференциалу аргумента в степени *n* .

### Задания:

1) Найдите производные третьего порядка:

1. $y = e^{-x^3}$
2. $y = tgx$
3. $y = \cos^3 x$
4. $y = \sqrt{1+x^2}$
5. $y = x\arcsin x$
6. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

2) Найдите дифференциалы второго порядка:

1. $y = 4^{-x^2}$
2. $y = \sin^2 x$
3. $y = \dfrac{x+1}{x}$
4. $y = x^3 2^x$

3) Найдите дифференциалы указанных порядков:

1. $y = \sin^2 x;$ *найти* $d^3 y$
2. $y = \sqrt{x-1};$ *найти* $d^4 y$
3. $y = x\ln x;$ *найти* $d^5 y$

**Контрольные вопросы:**

1. Как найти производную второго и третьего порядка?
2. Как находятся дифференциалы функции высших порядков?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

## Практическое занятие № 9
## Тема: Исследование функции и построение ее графика

**Цель:** научится проводить исследование функции с помощью производной и строить ее график.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК 8, ОК 9.

Время выполнения 2 часа.

### Теоретический материал

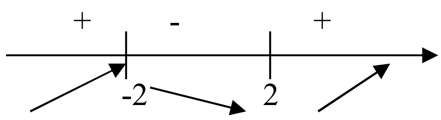
*Теорема.* Если функция дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ на интервале $(a;b)$, то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на интервале $(a;b)$.

*Пример.* Определить промежутки, на которых функция $f(x) = x^3 - 12x + 11$ возрастает и убывает.

*Решение*: Область определения функции – все действительные числа $D(x) = R$.

Находим производную функции $f'(x) = 3x^2 - 12$, приравниваем производную к нулю $f'(x) = 0$, т. е. $3x^2 - 12 = 0$ и находим критические точки (критические точки – это точки, в которых производная равна нулю). $\Rightarrow 3x^2 = 12$, $x^2 = 4$, $x_1 = -2$ $x_2 = 2$.

Нанесем критические точки на числовую ось и определим знаки производной на интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;2)$, $(2;+\infty)$.




Так как производная положительна на интервалах $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$, то функция на этих интервалах возрастает. А на интервале $(-2;2)$ производная отрицательна, то функция на этом интервале убывает.

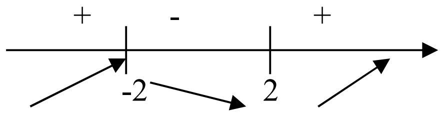
*Теорема (необходимое условие локального экстремума).* Если функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, $f'(x) = 0$.

Точки в которых производная функции равна нулю, принято называть точками возможного экстремума.

*Теорема (достаточное условие локального экстремума).* Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой $\delta$ - окрестности точки $x_0$. Тогда если $f'(x)$ при переходе через точку $x_0$ меняет знак с «+» на «-», в точке $x_0$ - точка локального максимума, если $f'(x)$ при переходе через точку $x_0$ меняет знак с «-» на «+», в точке $x_0$ - точка локального минимума, если же знак $f'(x)$ в точке $x_0$ не изменится, то в точке $x_0$ экстремума не существует.

*Пример.* Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 12x + 11$.

*Решение*: Ранее были определены критические точки, знаки производной на интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;2)$, $(2;+\infty)$ и промежутки возрастания и убывания функции.




При переходе через точку $x$=-2 производная сменила знак «+» на «-», значит точка $x$=-2 – точка максимума. При переходе через точку $x$=2 производная сменила знак с «-» на «+», значит точка $x$=2 – точка минимума.

Максимальное значение функции $f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 11 = -8 + 24 + 11 = 27$.

Минимальное значение функции $f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 11 = 8 - 24 + 11 = -5$.

*Теорема.* Если функция $f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ вторую производную и $f''(x)\geq 0$ $(f''(x)\leq 0)$ во всех точках $(a;b)$, то график функции имеет на интервале $(a;b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх).

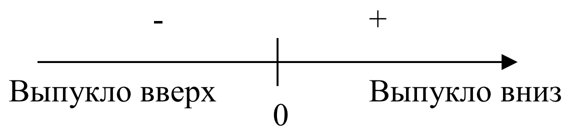
Точка $M_0(x_0;f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $f(x)$, если в точке $M$ график имеет касательную и существует такая окрестность точки $x_0$, в пределах которой график функции слева и справа от точки $x_0$ имеет разные направления выпуклости.

*Теорема (необходимое условие точки перегиба).* Пусть график функции $f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0;f(x_0))$ и пусть функция имеет в точке $x_0$ непрерывную вторую производную. Тогда $f''(x)$ в точке $x_0$ обращается в нуль, т. е. $f''(x)=0$.

*Теорема (достаточное условие точки перегиба).* Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки $x_0$, то график функции имеет перегиб в точке $M_0(x_0;f(x_0))$.

*Пример.* Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x)=x^3-12x+11$.

*Решение*: Найдем вторую производную функции $f'(x)=3x^2-12 \Rightarrow f''(x)=6x$. Приравниваем вторую производную к нулю и находим критическую точку $6x=0$, $x=0$. Нанесем критическую точку на числовую ось и определим знаки второй производной нВ полученных интервалах $(-\infty;0)$ *и* $(0;+\infty)$.




Точка $x$=0 является точкой перегиба, так как слева и справа от нее вторая производная имеет разные знаки.

Точка перегиба $f(0)=0^3-12\cdot 0+11=11$. Интервалы выпуклости - $(-\infty;0)$ *и* $(0;+\infty)$.

Прямая линия называется асимптотой графика функции $f(x)$, если расстояние от точки *M*, лежащей на графике, до этой прямой стремится к нулю при движении точки по графику в бесконечность.

Существует три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y=A$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

Прямая $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ называется наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

*Теорема.* Для того чтобы график функции $f(x)$ имел при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} [f(x)-kx]=b$.

*Пример.* Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$.

*Решение*: Точка $x$=3 – точка разрыва функции, следовательно, прямая $x$=3 – вертикальная асимптота. Так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{(x-3)x}=0$, то график функции наклонных асимптот не имеет.

Находим горизонтальную асимптоту: $b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{x-3}=1$. Таким образом, график данной функции имеет вертикальную асимптоту $x=3$ и горизонтальную асимптоту $y=1$.

<u>Схема исследования функции</u>:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Исследовать функцию на непрерывность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Установить интервалы возрастания и убывания функции, определить её экстремумы, наибольшее и наименьшее значение.
6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки её перегиба.
7. Найти асимптоты графика функции.
8. Построить график функции.

**Задания:**

1.Найдите интервалы возрастания и убывания функции $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$.

2.Исследуйте на экстремум функцию $y=(x-5)e^x$.

3.Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=3x-x^3$ на отрезке $[-2;3]$.

4.Найдите интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y=x^5+5x-6$.

5.Найдите точки перегиба кривой $y=(x-5)^{\frac{5}{3}}+2$.

6.Найдите асимптоты кривой $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

7.Исследуйте функции и постройте их графики:

1) $y=\dfrac{x^2+9}{x^2}$

2) $y=\dfrac{x^3+16}{x}$.

3) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

4) $y=16x(x-1)^2$

5) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

6) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$

**Контрольные вопросы:**

1. Как находятся экстремумы функции?
2. Как находится точка перегиба?
3. Что такое асимптота?
4. Назовите схему исследования функции.

Рекомендуемая литература: 1, 2.

**Практическое занятие № 10**
**Тема: Нахождение неопределенного интеграла методом замены и интегрирования по частям**

**Цель:** научится находить неопределенные интегралы методом замены и интегрирования по частям.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК 4, ОК 8, ОК 9.

Время выполнения 2 часа.

**Теоретический материал**

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)* на промежутке *X*, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

*Пример.* Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на $X = (-\infty, +\infty)$, так как при любом $x$ $(\sin x)' = \cos x$.

Если функция *F (x) – первообразная для функции f (x) , то множество функций F (x)+ C, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции f (x) и обозначается символом* $\int f(x)dx = F(x) + C$.

При этом функция *f (x)* называется *подынтегральной функцией, f (x)dx – подынтегральным выражением,* а переменная *x – переменной интегрирования.*

Восстановление функции по ее производной, т. е. отыскание неопределенного интеграла, называется *интегрированием*. Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.

*Пример.* Проверить, что $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

*Решение*. Дифференцируя результат интегрирования $(x^3 + C)' = 3x^2$, получаем подынтегральную функцию. Следовательно, интегрирование выполнено верно.

*Основные свойства неопределенного интеграла:*

1. $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$.
2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.
5. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

*Таблица основных интегралов:*

**1.** $\int du = u + c$

**2.** $\int u^n dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$

**3.** $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$

**4.** $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c$

**5.** $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + c$

**6.** $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$

**7.** $\int a^{ku} du = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{a^{ku}}{\ln a} + c$

**8.** $\int e^u du = e^u + c$

**9.** $\int e^{ku} du = \dfrac{1}{k} \cdot e^{ku} + c$

**10.** $\int \sin u\,du = -\cos u + c$

**11.** $\int \sin ku\,du = -\dfrac{1}{k}\cos ku + c$

**12.** $\int \cos u\,du = \sin u + c$

**13.** $\int \cos ku\,du = \dfrac{1}{k}\sin ku + c$

**14.** $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$

**15.** $\int \dfrac{du}{\cos^2 ku} = \dfrac{1}{k} tgku + c$

**16.** $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$

**17.** $\int \dfrac{du}{\sin^2 ku} = -\dfrac{1}{k} ctgu + c$

**18.** $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$

19. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a}+c$

20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-(bu)^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{b}{a}u+c$

21. $\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu+c$

22. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+c$

23. $\int \frac{du}{a^2+(bu)^2} = \frac{1}{ab}arctg\frac{b}{a}u+c$

Кроме непосредственного интегрирования для нахождения интегралов применят метод подстановки (замены переменной) и метод интегрирования по частям.

*Метод подстановки (или замена переменной)* заключается в том, что заменяют $x$ на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$- непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx=\varphi'(t)dt$ и получают

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

При этом получают искомую функцию, выраженную через переменную $t$. Для возвращения к переменой $x$ значением $t=\psi(x)$, которое находится из соотношения $x=\varphi(t)$.

Указанную формулу применяют также и в обратном направлении:

$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\Big|_{t=\psi(x)} = \int f(x)dx$, где $t=\psi(x)$ – функция, обратная функции $x=\varphi(t)$.

*Пример.* Вычислить интеграл $\int \cos 3x dx$.

*Решение.* Интеграл не табличный. Применим подстановку:

$$\int \cos 3x dx = \begin{bmatrix} 3x=t \\ 3dx=dt \\ dx=\frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{\cos t dt}{3} = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = [\text{возвращаемся к переменной } x] = \frac{1}{3}\sin 3x +$$

*Пример.* Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

*Решение*. Вычислим данный интеграл непосредственно, выделяя дифференциал новой переменной интегрирования.

Имеем

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1/2d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-1/2d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}d(1-x^2) = -\frac{1}{2}*2(1-x^2)^{1/2}+C = -(1-x^2)^{1/2}+C.$$

Данный интеграл вычисляется с помощью подстановки $t=1-x^2$. Существует другой несложный, но весьма эффективный прием, позволяющий упростить вычисление интегралов. Если числитель подынтегральной функции $f(x)$ равен производной знаменателя, то справедлива формула

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C.$$

Действительно, используя подстановку $t=f(x)$, $dt=f'(x)dx$, имеем

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|f(x)|+C.$$

*Формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле называется формула* $\int udv = uv - \int vdu$, где $u$ и $v$ – дифференцируемые функции от $x$. Она позволяет свести вычисление $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым для интегрирования.

Большую часть интегралов, вычисляемых интегрированием по частям можно разбить на три группы.

1) Интегралы вида $\int P(x) arctgx dx$, $\int P(x) arcctgx dx$, $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, где *P(x)* – многочлен. Для их вычисления следует положить *u* равным одной из указанных выше функций, а *dv=P(x)dx*.

*Пример.* Вычислить интеграл $\int arctgx dx.$

*Решение*:

$$\int arctgx dx. = \begin{bmatrix} u = arctgx & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = u\cdot v - \int v du = x\cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x\cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2}\begin{bmatrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{bmatrix} = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln t + C =$$

$$x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

2) Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kx dx, \int P(x)\cos kx dx,$ *где* $- P(x) -$ *многочлен*, а $k$ - некоторое число. Для их вычисления следует положить $u = P(x), adv = e^{kx}dx, dv = \sin kx dx, dv = \cos kx dx$ соответственно.

*Пример.* Вычислить интеграл $\int xe^x dx.$

*Решение.* $\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C.$

3) Интегралы $\int e^{ax}\cos bx dx, \int e^{ax}\sin bx dx,$ где $a$ и $b$ – некоторые числа. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям.

*Пример.* Вычислить интеграл $\int e^x \cos x dx.$

*Решение:* Положим $u=e^x$, $dv = \cos x dx$ (можно положить также $u = \cos x$, $dv= e^x dx$). Тогда

$$du = \left(e^x\right)' dx = e^x dx; \int dv = \int \cos x dx, v = \sin x.$$

По формуле (1) имеем

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx. \qquad (2)$$

Полученный интеграл снова вычисляем интегрированием по частям, положив $u=e^x$, $dv=\sin x dx$, откуда $du=e^x$, $v=-\cos x$. Тогда $\int e^x \sin dx = -e^x\cos x + \int e^x \cos x dx.$

Подставляя значение полученного интеграла в выражение (2), находим

$$\int e^x\cos x dx = e^x \sin x - \left(-e^x\cos x + \int e^x\cos x dx\right) = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Переносяя интеграл из правой части равенства в левую, получаем

$$2\int e^x\cos x dx = e^x\left(\sin x + \cos x\right) + C_1$$

И окончательно получаем

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}\left(\sin x + \cos x\right) + C,$$

где $C=C_1/2$ (так как $C$ – произвольная постоянная, то и $C_1/2$ - также произвольная постоянная).

**Задания:**

*Найдите интегралы:*

1. $\int \cos 5x dx$
2. $\int \sin(3x+5)dx$
3. $\int e^{2x}dx$
4. $\int \frac{e^{4x}}{e^x - 1}dx$
5. $\int \frac{x^4}{x^5+7}dx$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$
7. $\int (2+5x)^9 dx$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$
9. $\int \sqrt{2x-5}dx$
10. $\int \frac{dx}{5x+2}$
11. $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$
12. $\int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$
13. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
14. $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$
15. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$
16. $\int \frac{dx}{4x^2+5}$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$
18. $\int xarctgxdx$
19. $\int \arcsin x dx$
20. $\int \ln x dx$
21. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
22. $\int xe^{-x}dx$
23. $\int (x+1)\cos x dx$
24. $\int x^2 \sin x dx$
25. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

**Контрольные вопросы:**

1.Что называют неопределенным интегралом?
2.Как выполняется интегрирование методом замены переменной?
3.Как выполняется интегрирование по частям?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

## Практическое занятие № 11
## Тема: Интегрирование дробно – рациональных, тригонометрических и иррациональных функций

**Цель:** научится интегрировать дробно – рациональные, тригонометрические и иррациональные функции.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК4, ОК 8, ОК 9.

Время выполнения 2 часа.

### Теоретический материал

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется неправильной.

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующего вида:

1. $\frac{A}{x-a}$.
2. $\frac{A}{(x-a)^m}$, где $m$ – целое число, большее единицы.
3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $\frac{p^2}{4}-q<0$, т. е. квадратный трехчлен $x^2+px+q$ не имеет действительных корней.
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где $n$ – целое число, большее единицы, и квадратный трехчлен $x^2+px+q$ не имеет действительных корней.

Во всех четырех случаях предполагается, что *A, B, p, q, a* – действительные числа.

Интегралы простейших дробей:

1. $\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$.
2. $\int\frac{A}{(x-a)^m}dx = -\frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C$.
3. $\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$,

т.к. $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=t^2+a^2$, где $t=x+\frac{p}{2}$, $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ ($\frac{p^2}{4}-q<0$).

*Пример*.

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\int\frac{dx}{x^2+2\cdot3\cdot x+9+16}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+16}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+4^2}=\frac{1}{4}arcgt\frac{x+3}{4}+C.$$

В общем виде дробь 3 типа интегрируется следующим образом:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p-p)+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}2x+\frac{A}{2}p-\frac{A}{2}p-B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}-B}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

4. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p-p)+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx=$

$$\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$$

Первый интеграл в правой части равенства находится с помощью подстановки $x^2+px+q=t$, а второй преобразуется следующим образом

$$\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}=\begin{bmatrix} x+\frac{p}{2}t\\ dx=dt\\ \textit{обознач}\\ q-\frac{p^2}{4}=a^2\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Таким образом, интегрирование элементарной дроби 4 типа может быть выполнено с помощью рекуррентной формулы.

*Пример.*

$$\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx=\int\frac{3x+6-6+2}{(x^2+2x+10)^2}dx=\int\frac{\frac{3}{2}2x+\frac{3\cdot2}{2}-\frac{3\cdot2}{2}+\frac{2\cdot2}{2}}{(x^2+2x+10)^2}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+(2-3)}{(x^2+2x+10)^2}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx-\int\frac{1}{((x+1)^2+9)^2}dx=\begin{bmatrix}x^2+2x+10=z\\(2x+2)dx=dz\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x+1=t\\dx=dt\end{bmatrix}=\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2}-\int\frac{dt}{(t^2+9)^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}z^{-1}-\left[\frac{1}{2(2-1)\cdot9}\cdot\frac{t}{(t^2+9)^{2-1}}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\cdot\int\frac{dt}{t^2+9}\right]=-\frac{3}{2z}-\frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\cdot arctg\frac{t}{3}+C=$$

$$=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10}-\frac{1}{54}\cdot arctg\frac{x+1}{3}+C$$

**Задания:**

Найдите интегралы:

1. $\displaystyle\int\frac{x}{2x^2+2x+5}dx$
2. $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}$
3. $\displaystyle\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$
4. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$
5. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$
6. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$
7. $\displaystyle\int\frac{\sin x+\sin^3x}{\cos2x}dx$
8. $\displaystyle\int\sin^2x\cos^2xdx$

**Контрольные вопросы:**

1. Какая дробь называется рациональной?
2. Как простейшие правильные рациональные дроби интегрируются?
3. Как интегрируются тригонометрические функции?
4. Как интегрируются простейшие иррациональности?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

**Практическое занятие № 12**
**Тема: Вычисление определенного интеграла методом замены и интегрирования по частям**

**Цель:** научится вычислять определенный интеграл методом замены и интегрирования по частям.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК4, ОК 8, ОК 9.

Время выполнения 2 часа.

**Теоретический материал**

Пусть функция *f(x)* определена на отрезке [*a,b*], *a<b*. Разобьем этот отрезок на *n* произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{j-1}x < x_j < ... < x_n = b$. В каждом из полученных частичных отрезков [$x_{j-1},x_j$] выберем произвольную точку ($\xi_{j-1} \le \xi_j \le x_j$) и составим сумму $\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{j-1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$ (1), где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сумма вида (1) называется *интегральной суммой* для функции *f(x)* на [*a,b*].

Обозначим через $\lambda$ длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\lambda = MAX\{\Delta x_i\}$.

*Если существует конечный предел I интегральной суммы (1) при* $\lambda \to 0$, *то этот предел называется определенным интегралом от функции f(x) по отрезку [a,b] и обозначается следующим образом:*

$$I = \int_a^b f(x)dx \ \text{или} \ \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В этом случае функция *f(x)* называется *интегрируемой* на [*a,b*]. Числа *a,b* называются соответственно нижнем и верхним пределами интегрирования **,** *f(x)* – подынтегральной функцией, *x* – переменной интегрирования.

Для интегрируемости функции достаточно ее непрерывности на отрезке [*a,b*].

Основные свойства определенного интеграла:

1. По определению, $\int_a^a f(x)dx = 0.$

2. По определению, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

3. Каковы бы ни были *a,b,c*, всегда имеет место равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла т.е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме их интегралов, т.е. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)dx]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a,b*] и функция *f(x)* является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место *формула Ньютона –Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

*Пример.* Вычислить интеграл $\int_a^b \sin x dx$. *Решение:* $\int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$

**Задания:**

Вычислите интегралы:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$
2. $\int_0^{\pi/4} \frac{x^2}{1+x^2}dx$
3. $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$
4. $\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x dx.$
5. $\int_1^e \ln x dx.$
6. $\int_1^e \ln^2 x dx$
7. $\int_0^{\sqrt{3}} arctgx dx$
8. $\int_{-1}^1 xe^{-x^2} dx$
9. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$
10. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx.$
11. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$
12. $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx.$
13. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}.$
14. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}.$

**Контрольные вопросы:**

1.Перечислите свойства определенного интеграла.

2.Как вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

## Практическое занятие № 13
## Тема: Нахождение площадей поверхностей фигур и объемов тел вращения

**Цель:** научится находить площади поверхностей фигур и объемы тел вращения с помощью интеграла.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК4, ОК 8, ОК 9.

Время выполнения 2 часа.

### Теоретический материал

Площадь плоской фигуры находится по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx,$$

где $S$ – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a,b]$ на оси $Ox$ и прямыми $x=a$, $x=b$, $a<b$.

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx,$$

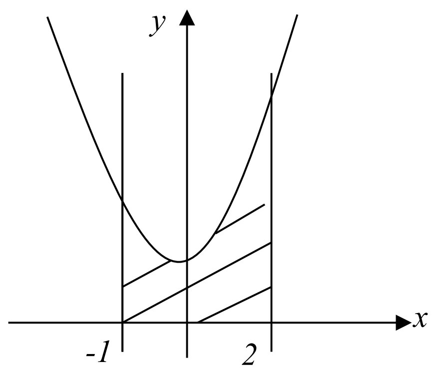
где $S$ – площадь фигуры, заключенной между графиками функций $f_2(x)$ и $f_1(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$, $f_2(x)\ge f_1(x)$, $a<b$.

Объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0\le y\le f(x)$, $a\le x\le b$ вокруг оси $Ox$ находится по формуле $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

*Пример*. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$ и $x=2$.

$y=x^2+1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| $\pm 1$ | 2 |
| $\pm 2$ | 5 |




$$S=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(\frac{2^3}{3}+2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-1\right)=\frac{8}{3}+2+\frac{1}{3}+1=6\ \textit{кв.ед.}$$

Ответ: Площадь фигуры равна 6 кв.ед.

### Задания:

1. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:
   1) $y=4-x^2$, $y=0$.
   2) $y=4x-x^2$ и осью $Ox$.
   3) $y=-x^2$, $x+y+2=0$.
   4) $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$.

5) $y=(x-1)^2$, $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

6) $y=\cos x$, $y=\sin x$, $x=0$.

2. Найдите объемы тел, образованных вращением вокруг оси $Ox$ фигур, ограниченных линиями:

1) $y^2=2x$, $y=0$, $x=1$.

2) $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

3) $y=3-x^2$, $y=x^2+1$.

4) $y^2=9x$, $y=3x$.

**Контрольные вопросы:**

1. Назовите алгоритм вычисления площади фигуры с помощью интеграла.
2. Назовите алгоритм вычисления объема тела вращения с помощью интеграла.

Рекомендуемая литература: 1, 2.

**Практическое занятие № 14**
**Тема: Нахождение пределов функции двух переменных**

**Цель:** научится находить пределы функций двух переменных.
Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК4, ОК 8, ОК 9.
Время выполнения 2 часа.

**Теоретический материал**

Пусть функция $z = f(M)$ определена на некотором множестве $\{M\}$ и точка $M_0 \in \{M\}$, но обладает тем же свойством, что любой δ - окрестности этой точки содержится хотя бы одна точка множества $\{M\}$, отличная от $M_0$.

Число *А* называется *пределом функции* $z = f(M)$ в точке $M_0$, если для любой сходящейся к $M_0$ последовательности точек $M_1, M_2, ..., M_n, ... (M_n \neq M_0, M_n \in \{M\})$ соответствующая последовательность значений функции $f(M_1), f(M_2), ..., f(M_n), ...$ сходиться к $A$ и обозначается $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A$.

На функции нескольких переменных переносятся все положения теории пределов функции одной переменной.

*Пример*. Вычислите предел $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (x^2 + y^2)$.

*Решение*: Функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ определена на всей плоскости. Поэтому для любой последовательности точек $\{M_n\}$, сходящееся к точке $M_0(1;2)$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} (x_n{}^2 + y_n{}^2) = \lim_{n \to \infty} x_n{}^2 + \lim_{n \to \infty} y_n{}^2 = 1^2 + 2^2 = 5.$$

**Задания для самостоятельной работы:**

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ y \to 1}} x^2 y$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \dfrac{x}{y}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \dfrac{x^2 + 4y}{2xy - 1}$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2x - xy - 2y}$
5. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$
6. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$
7. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$
8. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1}$
9. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}}$
10. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} (1 + xy^2)^{\frac{y}{x^2 y + xy^2}}$

**Контрольные вопросы:**
1.Как находятся частные производные функции нескольких переменных?
2.Что такое дифференциал функции нескольких переменных?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

**Практическое занятие № 15**
**Тема: Нахождение экстремумов функции двух переменных**

**Цель:** научится находить экстремумы функций двух переменных.
Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК4, ОК 8, ОК 9.
Время выполнения 2 часа.

**Теоретический материал**

Пусть функция $z = f(M)$ определена на некоторой окрестности точки $M(x;y)$. Придадим переменной $x$ в точке $M$ произвольное приращение $\Delta x$, оставляя значение переменной $y$ неизменным. Тогда соответствующее приращение функции $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ называется *частным приращением* функции по переменной $x$ в точке $M(x;y)$.

Аналогично определяется частное приращение функции по переменной $y$: $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ $\left(\lim\limits_{\Delta y\to 0}\right)\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то он называется *частной производной функции* $z = f(M)$ в точке $M$ по переменной $x$ (по переменной $y$) и обозначается одним из следующих символов $z'_x,\ \ f'_x,\ \ \dfrac{\partial f}{\partial x},\ \ \dfrac{\partial z}{\partial x}\ \ \left(z'_y,\ \ f'_y,\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

*Пример.* Найти частные производные функции $z = x^2 - 2xy^2 + y^2$.

*Решение*: $z'_x = 2x - 2y^2$; $\quad z'_y = -4xy + 2y$.

Если $z = f(x,y)$, $x = x(t),\quad y = y(t)$, то $z = f[x(t), y(t)]$ является *сложной функцией от t*.

При этом $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$.

Если $z = f(x,y)$, $x = x(u;v),\quad y = y(u;v)$, то

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{cases}$$

Пусть функция $z = f(M)$ дифференцируема в точке $M$, т.е. ее полное приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta z = f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y) + \beta(\Delta x,\Delta y)$, где $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ *и* $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$.

*Дифференциалом dz* дифференцируемой в точке $M$ функции $z = f(M)$ называется линейная относительно приращений $\Delta x, \Delta y$ часть полного приращения этой функции в точке $M$, т.е. $dz = f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y$. Дифференциалами независимых переменных $x$ и $y$ называют приращения этих переменных: $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

Тогда дифференциал функции записывается так $dz = f'_x(x;y)dx + f'_y(x;y)dy$.

*Пример*. Найти дифференциал функции $z = xy^2$.

*Решение*: $f'_x = y^2$; $\ f'_y = 2xy \Rightarrow dz = y^2dx + 2xydy$.

Необходимые условия экстремума функции $f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ возможного экстремума заключаются в выполнении в этой точке равенств $f'_x(x_0;y_0) = f'_y(x_0;y_0) = 0$. При этом функция $f(x;y)$ имеет в данной точке максимум, если $\Delta = f''_{xx}(x_0;y_0)\cdot f''_{yy}(x_0;y_0) - [f''_{xy}(x_0;y_0)]^2 > 0$ и $f''_{xx}(x_0;y_0) < 0$, и минимум, если $\Delta > 0$ и $f''_{xx}(x_0;y_0) > 0$ (при условии непрерывности частных производных). Если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0;y_0)$ нет экстремума. Если $\Delta = 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ может иметь экстремум, но может и не иметь его.

*Пример*. Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

*Решение*: $f'_x = 2x + y - 2$, $f'_y = x + 2y - 3$. Найдем точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3},\ y = \frac{4}{3}$$, т.е. точка $M_0\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ – точка возможного экстремума.

Найдем частные производные второго порядка $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 2$, $\Delta = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$ и $f''_{xx} = 2 > 0$, то в точке $M_0\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ данная функция имеет минимум.

## Задания:

Найдите экстремумы функций:

1. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $z = xy^2(1 - x - y)$
3. $z = x^3 + y^3 - 15xy$
4. $z = 4 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$
5. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$
6. $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$
7. $z = xy(1 - x - y)$
8. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
9. $z = e^{x/2}(x + y^2)$
10. $z = x^3 - y^3 - 3xy$
11. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$
12. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
13. $z = 2xy - 4x - 2y$
14. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$
15. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$
16. $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$

**Контрольные вопросы:**

1. Назовите необходимое условие экстремума функции двух переменных.
2. Как находится точка возможного экстремума?
3. При каком условии экстремум функции не существует?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

## Практическое занятие № 16
## Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

**Цель:** научится решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК4, ОК 8, ОК 9.

Время выполнения 2 часа.

### Теоретический материал

*Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную *x*, искомую функцию *y* и ее производные или дифференциалы.

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

*Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение.

Уравнения вида $F(x, y.y') = 0$, где $x$ – неизвестная переменная, $y$ – искомая функция, $y'$ – ее производная, называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

*Решением дифференциального уравнение первого порядка* называется функция $y = \varphi(x),\ x \in (a,b)^*$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

*Общим решением* дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

*Частным решением* дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

Уравнение вида $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывные функции, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

*Пример*. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

*Решение*: $y' = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow$ разделяем переменные, т.е. переносим в одну сторону все с *x*, а в другую все с *y*, т.е. $xdy = ydx \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow$ Интегрируем полученное уравнение $\int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{dx}{x}$
$\Rightarrow \ln y = \ln x + \ln|C| \Rightarrow \ln y = \ln C \cdot x \Rightarrow y = C \cdot x$.

### Задания:

1.Найдите общее решение уравнений и частное решение по начальным условиям $y_0 = 4$ при $x_0 = -2$:

1) $xy' - y = 0$
2) $yy' + x = 0$
3) $x^2 y' + y = 0$
4) $y' = y$

2.Найдите общие решения уравнений:

1) $x^2 \cdot y' + y = 0$
2) $x + y' \cdot \left(y + x^2 y\right) = 0$
3) $\left(1 + y^2\right)dx = \left(1 + x^2\right)dy$
4) $y - y' = 1 + x^2 \cdot y'$
5) $\left(x \cdot y^2 + x\right)dx + \left(y - x^2 \cdot y\right)dy = 0$
6) $\left(1 + 2y\right) \cdot xdx + \left(1 + x^2\right)dy = 0$
7) $xy\left(1 + x^2\right)y' = 1 + y^2$
8) $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$

**Контрольные вопросы:**

1. Что называют общим решением и частным решениями дифференциального уравнения?
2. Какое уравнение называю уравнением с разделяющимися переменными?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

**Практическое занятие № 17**
**Тема: Решение дифференциальных уравнений**

**Цель:** научится решать дифференциальные уравнения второго порядка.
Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК4, ОК 8, ОК 9.
Время выполнения 2 часа.

**Теоретический материал**

Уравнение вида $y' + p(x)y = f(x)$, где $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Если $f(x) \equiv 0$, то данное уравнение будет называться *линейным однородным уравнением первого порядка*, если же условие тождественного равенства не выполняется, то данное уравнение называется *линейным неоднородным уравнением*.

*Пример*. Найти общее решение уравнения $y' + 3y = e^{2x}$.

*Решение*: Данное уравнение является линейным, т.е. $p(x) = 3;\ f(x) = e^{2x}$.

Решаем сначала соответствующее однородное уравнение $y' + 3y = 0$. $\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \Rightarrow$

$$dy + 3ydx = 0 \Rightarrow dy = -3ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -3dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -3\int dx \Rightarrow \ln y = -3x + \ln C \Rightarrow$$

$y = \pm Ce^{-3x} = Ce^{-3x}$.

Общее решение данного неоднородного уравнения будем искать в том же виде $y = C(x)e^{-3x}$, только произвольную постоянную будем считать уже функцией от *x*. Применяем метод вариации постоянной. Дифференцируя, имеем $y' = C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x}$. Подставляя в данное уравнение выражения для $y$ и $y'$, получаем $C'(x)e^{-3x} = e^{2x} \Rightarrow C'(x) = e^{5x}$ или $dC = e^{5x}dx \Rightarrow$ $C(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C_1 \Rightarrow$ общее решение данного уравнения имеет $y = C(x)e^{-3x} = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C_1\right)e^{-3x}$.

Можно найти общее решение данного уравнения методом подстановки. Положим $y = uv$. Тогда будем иметь $y' = u'v + uv'$. Подставим эти выражения в данное уравнение.

$$u'v + uv' + 3uv = e^{2x}\ (*) \Rightarrow u'v + u(v' + 3v) = e^{2x} \Rightarrow v' + 3v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -3v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -3dx \Rightarrow$$

$\ln v = -3x \Rightarrow v = e^{-3x}$. Подставляем это выражение в (*) $\Rightarrow u'e^{-3x} - 3ue^{-3x} + 3ue^{-3x} = e^{2x} \Rightarrow$ $u'e^{-3x} = e^{2x} \Rightarrow u' = e^{5x} \Rightarrow du = e^{5x}dx \Rightarrow u = \frac{1}{5}e^{5x}$. Так как $y = uv$, то $y = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)e^{-3x}$.

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции, называется *уравнением Бернулли*. Уравнение Бернулли решается как линейное, подстановкой или вариацией произвольной постоянной. Приводится к линейному подстановкой $z = y^{1-n}$.

Уравнение вида $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$, где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x;y)$ в некоторой области $G$, называется *уравнением в полных дифференциалах*. Данное уравнение можно записать в виде $dF(x;y) = 0$ или $dF(x;y) = P(x;y)dx + Q(x;y)dy \Rightarrow$ общее решение уравнения имеет вид $F(x;y) = C$, т.е. решение сводится к отысканию функции $F(x;y)$.

Уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$, где *x* – независимая переменная, *y* – искомая функция, $y'$ и $y''$ – ее производные, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. Данное уравнение записывают разрешенным относительно второй производной $y'' = f(x, y, y')$ (*). Решением уравнения (*) называется $y = \varphi(x)$, $x \in (a;b)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. График решения называется *интегральной кривой*. Условия $y = y_0$, $y' = y'_0$ при $x = x_0$ (**) называют *начальными условиями*.

Функция $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ называют *общим решением* уравнения (*) в некоторой области $G$, если она является решением при любых значениях $C_1$ и $C_2$ и если при любых начальных условиях (**) существует единственные значения постоянных $C_1=C_1^0, C_2=C_2^0$, называется *частным решением*.

*Пример*. Найти общее и частное решения уравнения $y''=2$ при начальных условиях $y_0=1$, $y'_0=1$ при $x_0=1$.

*Решение*: Общее решение данного уравнения найдем двукратным последовательным интегрированием. Последовательно интегрируя находим сначала первую производную $y'=2x+C_1$, затем общее решение $y=x^2+C_1x+C_2$, где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные.

Подставляем значения начальных условий в общее решение и его производную:
$\begin{cases}1=1+C_1+C_2\\ 1=2+C_1\end{cases}$. Решив систему получаем $C_1=-1$ и $C_2=1$ $\Rightarrow$ частное решение – $y=x^2+x+1$.

Уравнение вида $y''+py'+qy=0$ (*), где $y$ – искомая функция, $p$ и $q$ – вещественные числа, называется *линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Для нахождения общего решения уравнения (*) составляется *характеристическое уравнение* $k^2+pk+q=0$, при этом заменяя $y''$ на $k^2$, $y'$ на $k$, $y$ на 1. Следовательно общее решение дифференциального уравнения в зависимости от корней характеристического уравнения $k_1$ и $k_2$. Здесь возможны три случая:

1. Корни $k_1$ и $k_2$ – действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения (*) имеет вид $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$.

2. Корни $k_1$ и $k_2$ – действительные и равные. В этом случае общее решение (*) имеет вид $y=(C_1+C_2x)\cdot e^{kx}$.

3. Корни $k_1$ и $k_2$ – комплексно – сопряженные: $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$. В этом случае общее решение уравнения (*) имеет вид: $y=e^{\alpha x}\cdot(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

*Пример*. Найти общее решение уравнения $y''+y'-2y=0$.

*Решение*: Составим характеристическое уравнение, заменяя $y''$ на $k^2$, $y'$ на $k$, а $y$ на 1. $\Rightarrow$

$k^2+k-2=0$. Решим уравнение и получим корни $k_1=1$ и $k_2=-2$ (действительные и различные). Этим корням соответствуют частные линейно независимые решения $y_1=e^x$ и $y_2=e^{-2x}$. Общее решение уравнения имеет вид $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

**Задания:**

1. Найдите общие решения уравнений:
   1) $y'-y=e^x$
   2) $y'+x^2\cdot y=x^2$
   3) $xy'+y=e^x$
   4) $xy'+2y=x^2$
2. Решите уравнения:
   1) $y'x+y=-xy^2$
   2) $y'+y=xy^3$
   3) $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$
   4) $xy'+y=y^2\ln x$
3. Решите уравнения:
   1) $y''-5y'+4y=0$
   2) $y''-6y'+9y=0$

**Контрольные вопросы:**

1. Какие уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями?
2. Как решаются уравнения Бернулли?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

## Практическое занятие № 18
## Тема: Выполнение действий с комплексными числами

**Цель:** научится складывать, вычитать, умножать и делить комплексные числа.
Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК4, ОК 8, ОК 9.
Время выполнения 2 часа.

### Теоретический материал

*Комплексным числом* $z$ называется упорядоченная пара вещественных чисел $(x;y)$, т.е. $z=(x;y)$. При этом $x$ называется *вещественной*, а $y$ – *мнимой частью комплексного числа*.

Комплексное число $z=(x;y)$ изображается на оси $Oxy$ точкой с координатами $(x;y)$. Плоскость $Oxy$ в этом случае называется *условно комплексной плоскостью*.

Комплексное число $(x;y)$ при $y\neq 0$ называется *мнимым*. Мнимое число $(0;y)$ называется *чисто мнимым*, а чисто мнимое число $(0;1)$ – *мнимой единицей* и обозначается $i$, т.е. $i=(0;1)$. По определению полагают $(x;0)=x$, $(0;y)=iy$, (0;0)=0.

*Действия с комплексными числами:*

Пусть $z_1=(x_1;y_1)$ и $z_2=(x_2;y_2)$ – два комплексных числа.

1. *Сумма* комплексных чисел находится по формуле $(x_1+i\cdot y_1)+(x_2+i\cdot y_2)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\cdot i$;
2. *Разность* – $(x_1+i\cdot y_1)-(x_2+i\cdot y_2)=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\cdot i$;
3. *Произведение* – $(x_1+i\cdot y_1)\cdot(x_2+i\cdot y_2)=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)\cdot i$;
4. *Частное* – $\dfrac{x_1+i\cdot y_1}{x_2+i\cdot y_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\cdot i$.

*Алгебраическая форма комплексного числа* – $z=(x;y)=(x;0)+(0;y)=(x;0)+(y;0)\cdot(0;1)=x+iy$.

В силу определения произведения комплексных чисел имеем $i^2=i\cdot i=(0;1)\cdot(0;1)=(-1;0)=-1$.

*Пример*. Найти сумму чисел $z_1=2+i$ и $z_1=3-i2$.

*Решение*: $z_1+z_2=(2+i)+(3-i2)=(2+3)+i(1-2)=5-i$.

Комплексное число $\bar{z}=(x;-y)=x-iy$ называется *комплексно – сопряженным* числу $z=(x;y)=x+iy$ и изображается на комплексной плоскости точкой, симметричной точке $z$ относительно $Ox$.

*Пример*. Решить уравнение $x^2+2x+2=0$.

*Решение*: Решим квадратное уравнение и получим $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{-1}=-1\pm i$. Данное уравнение вещественных корней не имеет; его корни комплексно – сопряженные, т.е. $x_1=-1+i$ и $x_2-1-i$.

*Тригонометрическая форма комплексного числа* – $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Число $\rho$ называется *модулем*, а число $\varphi$ – *аргументом* комплексного числа $z$. Они обозначаются следующим образом: $\rho=|z|$, $\varphi=Arg\,z$, причем аргумент $\varphi$ определен с точностью до слагаемого $2\pi n$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$, а модуль имеет значение $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

*Пример*. Представить в тригонометрической форме число $z=i$.

*Решение*: Для этого числа имеем $x=0,\ y=1$, $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{\rho}=\dfrac{0}{1}=0$,

$\sin\varphi=\dfrac{y}{\rho}=\dfrac{1}{1}=1$. Этим значениям косинуса и синуса соответствует значение аргумента

$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. следовательно, $z = i = 1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня $n$ – й степени ($n$ – целое положительное число) комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ определяется по формулам:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)];$$

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0,1,2,...,n-1).$$

В частности если в формуле $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$ положить $\rho = 1$, то получим формулу $z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, которая называется *формулой Муавра*.

**Задания для самостоятельной работы:**

1.Вычислите:

$i^{16}$, $i^{25}$, $(-i)^8$, $(-i)^7$, $i^6 + i^{20} + i^{30}$, $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4$

2.Выполните действия:

1) $(2+i3)(3-i2)$
2) $(a+ib)(a-ib)$
3) $(3-i2)^2$
4) $\dfrac{1+i}{1-i}$
5) $(1+i)^3$
6) $\dfrac{2i}{1+i}$
7) $(5+i2)+(3-i4)$
8) $(5+i2)(3-i4)$
9) $\dfrac{1+2i}{2+i3}$
10) $\dfrac{4+i3}{5-i2}$
11) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$, $z_1 = 2+i$, $z_2 = 2-i$, $z_3 = 4-3i$
12) $\dfrac{z_1}{z_2 z_3}$, $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$, $z_3 = 1+i\sqrt{3}$

3.Решите уравнения:

1) $x^2 + 25 = 0$
2) $x^2 - 2x + 2 = 0$
3) $x^2 - 2x + 5 = 0$
4) $x^2 + 4x + 13 = 0$
5) $x^3 - 8 = 0$
6) $x^4 + 4 = 0$

4.Представьте в тригонометрической форме комплексные числа:

1) $1$
2) $-1$
3) $-i$
4) $5$
5) $3+i3$
6) $-2$
7) $i6$
8) $-i3$
9) $1-i\sqrt{3}$
10) $\sqrt{3}+i3$
11) $-1-i\sqrt{3}$
12) $1+i$
13) $\dfrac{1}{i}$
14) $\dfrac{i-1}{1+i}$

5.Найдите все значения корней:

1) $\sqrt[3]{-i}$
2) $\sqrt{i}$
3) $\sqrt{1+i}$
4) $\sqrt[3]{-1+i}$

6.Вычислите:

1) $(\cos 9^\circ + i\sin 9^\circ)^{10}$
2) $(1+i)^{10}$
3) $(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)^{27}$
4) $(1-i\sqrt{3})^6$
5) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$

**Контрольные вопросы:**

1. Какие действия можно выполнять с комплексными числами и как они выполняются?
2. Какая запись комплексного числа называется алгебраической формой? тригонометрической формой?
3. Какое число называют модулем?

Рекомендуемая литература: 1, 2.

**Практическое занятие № 19**
**Тема: Нахождение вероятностей**

**Цель:** научится находить вероятности событий, используя формулы комбинаторики.
Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК4, ОК 8, ОК 9, ПК 1.4.
Время выполнения 2 часа.

**Теоретический материал**

*Вероятность*, есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Вероятность события *A* определяется формулой: $P(A) = \frac{m}{n}$.

*Свойства вероятности:*

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события есть положительное число больше нуля, но меньше единицы.

Основные формулы комбинаторики:

*Перестановками* называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок равно $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Известно, что 0!=1.

*Размещениями* называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений вычисляется по формуле: $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$.

*Сочетаниями* называют комбинации, составленные из *n* различных элементов по *m* элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетания определяется по формуле: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B).$$

Теорема. *Сумма вероятностей событий* $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, *образующих полную группу, равна единице:* $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

*Противоположными,* называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через *A,* то другое принято обозначать $\overline{A}$.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

*Произведением двух событий A и B* называют событие *AB,* состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Например, если *A*—деталь годная, *B* — деталь окрашенная, то *AB* — деталь годна и окрашена.

*Условная вероятность* события *B* при условии, что событие *A* уже наступило, по определению, равна $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB)=P(A)\,P_A(B)$.

Два события называют *независимыми*, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют зависимыми.

*Несколько событий называют независимыми в совокупности* (или просто *независимыми),* если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n,$ независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ...q_n .$$

Частный случай. Если события $A_1, A_2, ..., A_n,$ имеют одинаковую вероятность, равную $p$, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n .$$

**Задачи:**

1. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Из урны вынули один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.
2. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.
3. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
4. В партии из 15 деталей имеется 10 нестандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных ровно 2 стандартных.
5. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.
6. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найдите вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.
7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найдите вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.
8. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найдите вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.
9. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найдите вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.
10. В электрическую сеть последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $p_1$ = 0,1; $p_2$ = 0,15; $p_3$ = 0,2. Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.

**Контрольные вопросы:**

1. Назовите определение вероятности. Перечислите ее свойства.
2. Назовите теоремы сложения и умножения вероятностей.
3. Какая вероятность называется условной?

Рекомендуемая литература: 3.

## Практическая работа № 20
## Тема: Нахождение числовых характеристик ДСВ с помощью табличного процессора Excel

**Цель:** научится вычислять числовые характеристики ДСВ с помощью программы Excel.

Формируемые компетенции: ОК 1, ОК 2, ОК 3, ОК4, ОК 5, ОК 8, ОК 9, ПК 1.1, ПК 1.4.

Время выполнения 2 часа.

### Теоретический материал

*Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называют сумму произведений всех возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина $X$ принимает значения $x_1, x_2, ..., x_n$, вероятности которых равны $p_1, p_2, ..., p_n$. Тогда математическое ожидание *M(X)* случайной величины $X$ определяется равенством $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:
$$M(C) = C.$$
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:
$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X).$$
3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X)M(Y)$.
4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых: $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

Теорема. Математическое ожидание *M(X)* числа появлений события $A$ в $n$ независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: $M(X) = np$.

*Дисперсией* (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины $X$ и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины $C$ равно нулю: $D(C) = 0$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:
$$D(CX) = C^2 D(X).$$
3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.
4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

Теорема. Дисперсия числа появлений события $A$ в $n$ независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность $p$ появлений события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(C) = npq.$$

*Средним квадратическим отклонением* случайной величины $X$ называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

**Задания для самостоятельной работы**

1. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

| *X* | -4 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|
| *p* | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

2. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения с помощью программы Excel:

| *X* | 0,21 | 0,54 | 0,61 |
|---|---|---|---|
| *p* | 0,1 | 0,5 | 0,4 |

3. Найдите математическое ожидание случайной величины *Z,* если известны математические ожидания *X* и *У*: а) *Z=X+2У, M(X)=5, M(У)=3;* б) *Z=3X+4У, M(X)=2, M(У)=6.*
4. Дискретная случайная величина *X* принимает три возможных значения: $x_1=4$ с вероятностью $p_1=0{,}5$; $x_2=6$ с вероятностью $p_2=0{,}3$ и $x_3$ с вероятностью $p_3$. Найдите $x_3$ и $p_3$, зная, что *M(X)*=8.
5. Случайные величины *X* и *У* независимы. Найдите дисперсию случайной величины *Z = 3X+2У*, если известно, что *D(X)*=5, *D(У)*=6.
6. Найдите дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения с помощью программы Excel.

| *X* | -5 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| *p* | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

7. Найдите дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения с помощью программы Excel.

| *X* | 4,3 | 5,1 | 10,6 |
|---|---|---|---|
| *p* | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

8. Найдите дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения с помощью программы Excel.

| *X* | 131 | 140 | 160 | 180 |
|---|---|---|---|---|
| *p* | 0,05 | 0,10 | 0,25 | 0,60 |

9. Найдите дисперсию дискретной случайной величины *X* – числа появлений события *A* в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события *A* в каждом испытании равна 0,2.
10. Найдите дисперсию дискретной случайной величины *X* – числа отказов элемента некоторого устройства в десяти независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9.
11. Найдите дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения с помощью программы Excel.

| *X* | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| *p* | 0,2 | 0,2 | 0,5 | 0,1 |

12. Дискретная случайная величина *X* принимает три возможных значения: $x_1=1$ с вероятностью $p_1=0{,}5$; $x_2=2$ с вероятностью $p_2=0{,}3$ и $x_3$ с вероятностью $p_3$. Найдите $x_3$ и $p_3$, зная, что *M(X)*=6.

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение числовым характеристикам ДСВ.
2. Как вычисляются числовые характеристики ДСВ?

Рекомендуемая литература: 3.

## Список литературы

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник: Допущено Минобразования России. – ИЦ Академия, 2013
2. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика: учебник: Рекомендовано ФГУ «ФИРО»/ Под. Ред. В.А. Гусева. – ИЦ Академия, 2013.
3. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – 5-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2013.